Facultad de
Ciencias Económicas

MATEMÁTICA
EN CONTEXTOS ECONOMICOS

Universidad Nacional
de Río Cuarto

S. Butigué - M. Mussolini - J. Gallardo - M. Cassano - L. Bissio

MATEMÁTICA EN CONTEXTOS ECONÓMICOS

ÍNDICE

PALABRAS PRELIMINARES

En el marco de las actividades de ingreso 2026 a la Universidad Nacional de Río Cuarto, la Cátedra de Matemática I ha dispuesto, la realización de actividades que incluye el repaso de contenidos disciplinares a los efectos de facilitar el abordaje de las materias a cursar en el primer año de estudios de las carreras de Contador Público, Licenciado en Administración y Licenciado en Economía.

Introducción a la Matemática, será trabajado con docentes tutores durante el mes de febrero de 2026, busca contribuir a la formación básica del ingresante a la Facultad de Ciencias Económicas a través de la revisión de conceptos y herramientas matemáticas adquiridos en la escuela media.

Esperamos que el material que hoy ponemos a tu disposición te permita reflexionar acerca de aquellos contenidos que te ofrecen mayor dificultad como así también a través de la ejercitación y la transferencia de contenidos teóricos a situaciones problemáticas.

Objetivos que nos han impulsado a escribir este Módulo son para recuperar:

1) Los aprendizajes logrados en el nivel medio.
2) La manipulación conveniente del herramental matemático.
3) La interpretación en contextos económicos de los resultados hallados.

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a la Dra. María José Bianco, Profesora Titular Regular de la UBA, que con verdadero interés leyó nuestros borradores y formuló enriquecedoras sugerencias que mejoraron el texto en forma significativa.

Al Comunicador Social, Guillermo Sbrollini, quien interpretó la matemática en contexto económico y con creatividad y diseño elaboró el contenido de la tapa del texto a través del lenguaje gráfico.

Al Dr. Eneldo Ferniot, integrante de la Sociedad de Escritores Riocuartenses, que con su apoyo y compromiso realizó la revisión de la redacción del texto académico.

PRÓLOGO

En esta obra se puede comprobar un trabajo minucioso de los autores que dotan a los estudiantes de Ciencias Económicas de un texto completo y riguroso de los conceptos y herramientas que un curso de Cálculo requiere.

La propuesta consistente en que los contenidos fundamentales aquí desarrollados estén vinculados con las diversas dimensiones de la realidad económica, política, social y cultural, en una variedad de contextos y de formas diferentes son los pilares para la reflexión, comprensión y apropiación por parte de los estudiantes de los conceptos más significativos.

El tratamiento para cada tema se organiza en dos etapas, la primera aborda las cuestiones teóricas a partir de ejemplos cotidianos y una segunda que implica el trabajo sobre actividades secuenciadas que enfrentan y plantean a los estudiantes la búsqueda de esa matemática implícita en cada situación. Así, en cada propuesta aparecen preguntas, disparadores, reflexiones y conclusiones que resultan motivadores y esenciales para la construcción del conocimiento matemático.

La organización de los temas favorece el estudio, ya que los mismos están concatenados adecuadamente. La aparición de referencias históricas resulta muy interesante y dan vida a una ciencia que a menudo es visualizada como un corpus muy abstracto y ajeno a lo cotidiano. La utilización de íconos a lo largo de la lectura facilita y favorece el recorrido por la obra. Los gráficos, cuadros, ilustraciones también ayudan a comprender más acabadamente los conceptos trabajados. Asimismo, la inclusión de vínculos con sitios web es otro recurso muy bien utilizado.

Los contenidos presentados hilvanan tres ideas fundamentales: función, límite-continuidad y derivada. Y es en torno de estos conceptos, que se despliega una batería de otros conceptos y herramientas que

Gustavo Fabián Zorzoli es Profesor de Matemática, Astronomía y Computación, Especialista en Estadística Aplicada a la investigación en Ciencias Sociales de la FCE de la UNC. Se desempeña como docente desde el año 1987 y como Rector (2010 – 2018) del Colegio Nacional de Bs As de la UBA. Profesor Titular del área Matemática de la FCE de la UBA y Profesor Asociado en Matemática I y II de la FCE de la UNLZ. Participa de proyectos de investigación, ha presentado ponencias y una vasta cantidad de publicaciones de carácter científica en congresos y revistas internacionales.
Desde 2012 Director del UBATIC institucional del Colegio Nacional de Bs As. Ha publicado 22 libros, referidos a la enseñanza y producción de materiales en Matemática para la educación a distancia.

permiten entender, describir y predecir los fenómenos económicos desde una mirada más rigurosa.

Sus autores: Silvia Inés Butigué, María Susana Mussolini, Juan Manuel Gallardo, María Virginia Cassano y Lucrecia Paola Bissio son todos docentes de la cátedra de Análisis Matemático, de reconocida trayectoria. Esta particularidad fortalece aún más esta obra, pues en él están volcadas las experiencias que el ejercicio de la docencia universitaria suministra a los profesionales que tienen bajo su responsabilidad la enseñanza.

En resumen, el texto aquí desarrollado es una herramienta esencial para el estudio, comprensión y aprendizaje en un curso de Análisis Matemático para estudiantes de Ciencias Económicas.

Gustavo Fabián Zorzoli

ASPECTOS INTRODUCTORIOS

El material que se presenta está dirigido no solo al uso funcional del conocimiento matemático, sino también a aspectos de formación condicionados por múltiples dimensiones de la realidad económica, política, social y cultural, en una variedad de contextos diferentes y en una diversidad de formas que requieren reflexión y acercamiento específico. Para ello, se necesita no solo la base sólida de conocimientos en matemática, sino también, comprender procesos y principios básicos, y contar con la flexibilidad necesaria para utilizarlos en diferentes situaciones.

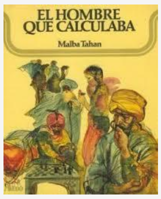
A través de su lectura se aspira a que los lectores adquieran tres competencias diferenciadas, la primera referida al conocimiento de hechos y sus representaciones, definiciones y cálculos, la segunda, a la posibilidad de establecer conexiones e integrarlas para resolver problemas y la tercera, en relación a la conceptualización de situaciones cotidianas, es decir reconocer y extraer las matemáticas implícitas en cada situación.

Además, cabe destacar, la participación de los autores del Proyecto sobre Escritura y Lectura en las disciplinas para primer año[1], en el marco del Programa de Ingreso, Continuidad y Egreso de estudiantes en las carreras de grado de la Universidad Nacional de Río Cuarto[2] aprobado por Resolución Nº380 /2015 del C.S.[3], en donde se observa la importancia de una sólida formación integrada y contextualizada que signifique a los estudiantes como protagonistas.

Al mismo tiempo, la propuesta fue desarrollada en concordancia con el Plan Estratégico Institucional y los lineamientos para la orientación a la innovación curricular de la UNRC aprobado por resolución N° 297/17 por C. S., intentando ser una propuesta pedagógica y curricular innovadora, diseñada para ofrecer un contexto de aprendizaje significativo, integral, sólido y relevante, en relación con el medio, las necesidades sociales y la historia.

Leer y escribir en matemáticas requiere que se piense sobre lo que significan las palabras, se interprete la información que proporcionan los gráficos, se comprendan y utilicen funciones matemáticas para describir un patrón de comportamiento.

Conocer las diferentes formas de expresión que usa la matemática permite tomar decisiones para hacer más accesibles algunos problemas, encontrar procedimientos más económicos o expresar resultados en forma más simple. En resumen, se requiere de una



"Hay una ciencia única, la Matemática, la cual nadie se puede jactar de conocer, porque sus conocimientos son, por su naturaleza, infinitos, y de la cual todos hablan, sobre todo los que más la ignoran" Fragmento extraído de la Novela "El hombre que calculaba" Pág. 57. https://goo.gl/2LBy7z

[1] PELPA
[2] UNRC
[3] Consejo Superior

cadena de razonamientos y la producción de informes, textos, que demandan de la aplicación de las técnicas que aportan las matemáticas, para que esas producciones no sean meramente intuitivas.

Los contenidos abordados en el ingreso y en la asignatura Análisis Matemático en sus dos modalidades, presencial y no presencial, de la Facultad de Ciencias Económicas, para las carreras de Contador Público, Licenciado en Administración y Licenciado en Economía, permiten utilizar la matemática en la descripción, análisis y resolución de problemas en el área de las Ciencias Económicas. Brindando herramientas útiles para la selección y organización de la información necesaria para la toma de decisiones. De esta forma se pretende alfabetizar matemáticamente para que los lectores puedan trabajar activamente con contextos reales.

Bajo esta idea y dentro del enfoque de enseñanza de prácticas situadas, se procura, a través del planteo de problemas cotidianos, que se relacionen los conceptos disciplinares trabajados que se encuentran plasmados a lo largo de los contenidos abordados. Comenzando con el estudio de los números reales y los conceptos básicos de funciones de una variable, para luego y en referencia a que todo fenómeno es una manifestación de cambio; el crecimiento de una organización, los ciclos de empleo, los índices de la bolsa de valores, el resultado de la balanza comercial, el crecimiento del Producto Bruto Interno; se introduce la idea de cambio y crecimiento a través de la noción de límite y continuidad, sobre la que se desarrolla la teoría del cálculo diferencial analizando el comportamiento no solo de la relación funcional entre variables, sino también el comportamiento de las funciones derivadas, que permiten estudiar la forma y la rapidez con que se producen los cambios, la optimización y los ritmos de cambios.

Para dar inicio a este camino, te proponemos que veas el video disponible en el siguiente link:

https://goo.gl/2HbmjT

GLOSARIO

Para hacer uso del lenguaje matemático preciso, en la Tabla N°1, te brindamos a continuación este glosario que contiene los símbolos y notaciones que le son propias.

Símbolos y Notaciones usados en Matemática:

$\in$: "pertenece a" o "perteneciente a"	∞: "infinito"
$\notin$: "no pertenece" o "no perteneciente a"	$\|a\|$: "módulo de a" o "valor absoluto de a"
$\Longrightarrow$: "implica" o "entonces"	$<$: "es menor que"
$\Longleftrightarrow$: "implica doblemente" o "sí y sólo si"	$\leq$: "es menor o igual que"
/: "tales que"	$>$: "es mayor que"
$\wedge$: "y"	$\geq$: "es mayor o igual que"
$\vee$: "o"	$\cap$: "intersección"
$\forall$: "cualquiera sea" o "para todo"	$\cup$: "unión"
$\exists$: "existe al menos uno"	$\mathbb{Q}$:" Números Racionales"
$\therefore$: "en consecuencia" o "por tanto"	$\mathbb{R}$:" Números Reales"
$=$: "igual"	I :" Números Irracionales"
$\neq$: "distinto" o "no es igual"	$\mathbb{N}$:" Números Naturales"
ε: "Épsilon"	$\mathbb{Z}$:" Números Enteros"
δ: "Delta"	F :" Números Fraccionarios"
	Δ:" Discriminante"
	Δy :" Incremento absoluto de la función"
	Δx :" Incremento absoluto de la variable independiente"

Tabla N° 1

MODALIDAD DE TRABAJO

El cronograma de los temas seleccionados para avocarnos a su repaso es el siguiente:

- **REPASO DE ALGEBRA**

Comenzaremos repasando cómo se forma el **conjunto de los números reales**, veremos las **operaciones** que pueden realizarse con ese conjunto, revisando algunas de las **propiedades** que más aplicaremos, también trabajaremos con **expresiones algebraicas**. Concluiremos este bloque recordando las **reglas de factorización** y su aplicación para factorizar expresiones y **simplificar fracciones.**

- **REPASO DE ECUACIONES**

Trabajaremos con **ecuaciones lineales y cuadráticas**, resolveremos **inecuaciones lineales** sencillas, con y sin módulo, introduciendo la notación de intervalo, para culminar con **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y métodos de resolución**. Esto te permitirá abordar problemas sencillos, en particular de aplicación económica, a través del planteo de ecuaciones y la resolución de las mismas.

- **REPASO DE FUNCIONES**

Estudiaremos las **relaciones funcionales** que surgen entre variables. Su estudio se formalizará a partir de las distintas representaciones: algebraicas, gráficas, expresiones coloquiales y tabla de valores. Centraremos el estudio principalmente en el concepto de función, analizando, dominio e imagen, comportamiento gráfico, puntos notables, intervalos de crecimiento o decrecimiento, intervalos en los cuales asumen valores positivos, negativos o nulos y valores extremos. Luego trabajaremos con funciones que frecuentemente aparecen en situaciones problemáticas de las Ciencias Económicas: **Funciones Lineales, Funciones Constantes, Funciones Cuadráticas, Funciones Exponenciales y Funciones Logarítmicas**.

Esperamos que esta breve revisión te posibilite recordar esos conceptos, pero si adviertes que están muy olvidados o si los recuerdas, pero quieres ampliarlos, puedes consultar los libros que has utilizado en el Secundario o algunos sitios web que conozcas o los que aquí te ofrecemos, como ser:

- ✓ http://www.vitutor.com/di/re/r2.html contiene teórico práctico de los números reales, operaciones, intervalos, valor absoluto, temas que también se retomarán en este módulo.
- ✓ http://www.vitutor.com/ab/p/a_1.html hace referencia a expresiones algebraicas, factorización, teoría y práctica con actividades resueltas.
- ✓ http://www.vitutor.com/ecuaciones/1/ecua_Contenidos.html trata sobre ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita, teoría y práctica con ejercicios resueltos.

ORGANIZACIÓN Y MODALIDAD DE LECTURA DEL LIBRO

Los conceptos desarrollados en los capítulos del texto serán relacionados con diferentes dimensiones de la realidad económica, política, social y cultural, en una variedad de contextos diferentes y en una diversidad de formas que requieren reflexión y acercamiento específico.

Cada tema abordado está organizado en una primera parte teórica con ejemplos cotidianos que te mostrarán el camino de cómo aplicar la teoría y en una segunda parte mediante actividades que te desafían a reconocer y extraer las matemáticas implícitas en cada situación.

De esta manera, te encontrarás con preguntas a responder, informes a elaborar, lo que ayudará a reflexionar sobre los conocimientos adquiridos, utilizando diferentes formatos, tablas y gráficos para favorecer una construcción de conocimiento comprensivo, relacionando el herramental de la disciplina con cuestiones de la vida diaria y de las ciencias económicas.

El siguiente formato te indica que:

Aquí encontrarás contenido destacado.

Además, hemos insertado íconos que te irán señalando si se trata de una actividad a resolver u observaciones a las que debes prestar especial atención, recordatorios de conceptos que has aprendido en tu paso por el nivel medio, tal como se muestran en la Tabla N°2 y N°3:

Icono	Descripción
	Este ícono indicará una **OBSERVACIÓN**, **NOTA** o **ACLARACIÓN** referida al contenido que se está desarrollando.
	Este corresponde a **EJEMPLOS**.
	Te indica que es una **ACTIVIDAD** que te desafía a poner en práctica tus conocimientos.
	Te indica que es la **RESOLUCIÓN** de una **ACTIVIDAD** que te desafía a poner en práctica tus conocimientos.
	**ACTIVIDAD DE INVESTIGACIÓN**.

Tabla N° 2

Icono	Descripción
	Simboliza una **REFLEXIÓN**, un **INTERROGANTE** a responder.
	Prestar especial **ATENCIÓN** al comentario que realizamos. Indica contenido **IMPORTANTE**.
	**PROCESOS TEMPORALES**.
	Indica la **PÁGINA WEB** a la que se puede acceder para el fin que se especifique.
	**BIBLIOGRAFÍA** que se podrá consultar para ampliar los temas abordados en este módulo.
	**ACTIVIDAD EVALUABLE**.

Tabla N°3

CAPÍTULO N°0:

REPASO DE CONOCIMIENTOS PREVIO DE ÁLGEBRA

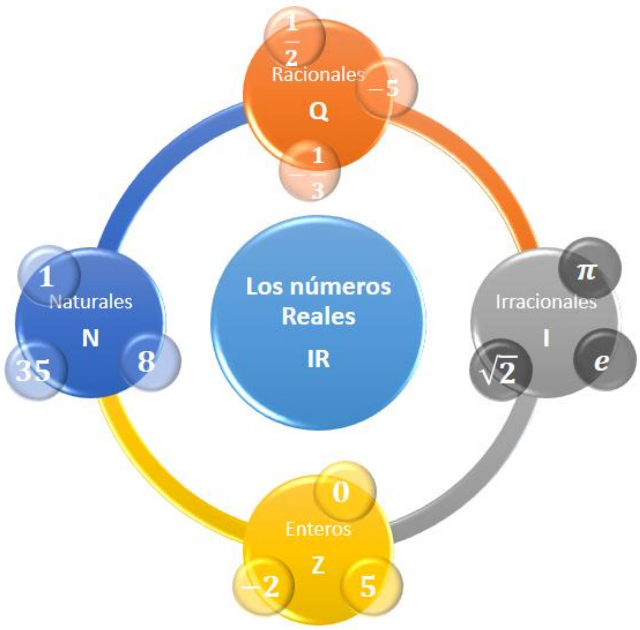
I Los Números Reales

En esta primera parte del módulo de matemática nos abocamos al campo numérico real, el cual está conformado por los conjuntos de los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales.

De cada uno de esos conjuntos repasaremos sus principales características y su representación geométrica.

Asimismo, revisaremos las propiedades de la adición, multiplicación, potenciación y radicación para poder realizar operaciones con los números reales.

Por último, te encontrarás con recomendaciones o sugerencias para tener en cuenta cuando efectúes operaciones con números reales.



Objetivos:

- ✓ Familiarizarse con el campo numérico real y la recta de los números reales.
- ✓ Operar con números reales y aplicar sus propiedades.

Para lograrlos te proponemos los siguientes

Contenidos:

1.1. ¿Con qué conjunto de números trabajaremos?

Recordemos que, cuando mencionamos un conjunto, nos estamos refiriendo a un grupo de objetos.

A su vez, cada objeto que se encuentra en un conjunto se denomina elemento.

Un conjunto puede especificarse listando sus elementos en cualquier orden dentro de llaves, en este caso, se dice que el conjunto está definido por **extensión** o **enumeración.**

El conjunto de las vocales, escrito por extensión, se expresa:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Pero, como frecuentemente trabajaremos con conjuntos que tienen infinitos elementos, en vez de listarlos, generalmente, describiremos las características de sus elementos, que es otra manera de designarlo; en este caso, se dice que está definido por **comprensión.**

En nuestro ejemplo: $A = \{x/x \text{ sea una vocal}\}$, indica que sus elementos cumplen la condición o característica común de ser vocales.

Volviendo a nuestro interrogante: **¿Con qué conjunto de números trabajaremos?**

Con el **CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES**

Antes de continuar con la lectura, ¿podrías mencionar diez **números que pertenezcan a dicho conjunto**?

....

....

....

En símbolos podemos indicarlo:

$$\mathbb{R} = \{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\}$$

Esta expresión indica que los reales son un conjunto formado por los elementos "x" que cumplen la condición de pertenecer al conjunto de los números reales.

Se llega al conjunto de los números reales a través de sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos, debido a la necesidad de ir resolviendo más operaciones.

Al conjunto de los números naturales, $N: \{1,2,3, \cdots\}$ ó $\{x/x \in N\}$, lo simbolizamos entre llaves, nombrando los primeros elementos y escribiendo tres puntos suspensivos, dado que el listado continúa sin fin. Con este conjunto podemos sumar y multiplicar, obteniendo como resultado otro número natural, pero no siempre es posible restar y dividir dos números naturales y obtener como resultado otro número natural. Además, no todas las raíces de números naturales dan como resultado otro número natural, por ejemplo $\sqrt{3}$ no da como resultado otro número natural.

Surge entonces, el conjunto de los enteros negativos, $Z^{-}: \{\cdots, -4, -3, -2, -1\}$, que junto al cero y a los naturales (también llamados enteros positivos, $Z^{+} \equiv N$), forman el conjunto de los números enteros: $Z = Z^{+} \cup \{0\} \cup Z^{-}$. En este conjunto es posible resolver, además de la suma y multiplicación, la resta y obtener como resultado otro número entero.

Como dentro del conjunto de los números enteros, no todas las divisiones de dos números enteros dan como resultado otro número entero y esto ocurre cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, aparecen los **números fraccionarios**, F, que dan solución a esta situación y que junto a los enteros forman el conjunto de los **números racionales**, simbolizado con una Q. Comprende a todo número que pueda expresarse como un cociente $\frac{p}{q}$, donde tanto "p" como "q" son enteros y $q \neq 0$.

Recordar que como operación aritmética no es posible dividir por cero:

$$\frac{p}{q} \quad con\ q \neq 0$$

Son ejemplos de números racionales: $\frac{4}{3}$; $0{,}5$ (ya que puede expresarse como $\frac{5}{10}$); 2 (ya que puede expresarse como $\frac{2}{1}$); etc.

Existen dos maneras de escribir un mismo número racional, como fracción o en forma decimal resolviendo el cociente.

En este último caso podemos obtener una expresión decimal exacta, por ejemplo: $1{,}5$ que se obtiene de $\frac{3}{2}$; o una expresión con infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente, por ejemplo: $0,\hat{2} = 0{,}22222\ldots$ que proviene de $\frac{2}{9}$ y $0{,}1\hat{4} = 0{,}14444\ldots$que proviene de $\frac{13}{90}$.

Completa el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, el subconjunto de los números irracionales, I . La particularidad de los números irracionales es que no pueden ser escritos como una división entre enteros y se expresan con infinitas cifras decimales NO periódicas. Es decir, los números irracionales son decimales cuya forma no es finita ni periódica. Algunos provienen de raíces no exactas.

Veamos, por ejemplo, algunos de los números irracionales más conocidos

$e = 2{,}7182818\ldots$(Número base del logaritmo natural)

$\pi = 3{,}141592654\ldots$; $\sqrt{3} = 1{,}73205080$; etc.

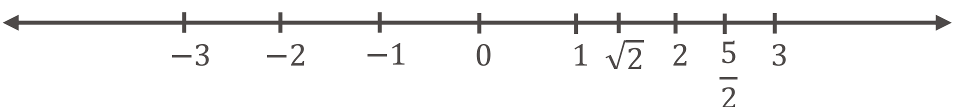
Los números **racionales** y los números **irracionales** forman el conjunto de los números **reales**: $\mathbb{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$

1.2. Representación de números reales en la recta

Los números reales pueden ser representados por puntos en una recta.

Para ello, primero se selecciona un punto en la recta que representa el cero, llamado origen, luego se elige un segmento unidad, cuya medida se marca sucesivamente a la derecha y a la izquierda del cero. Con cada punto sobre la recta asociamos un número con signo, que depende de la posición del punto con respecto al origen. Las posiciones a la derecha del origen son consideradas positivas y a la izquierda negativas. De esta manera, a cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta. De allí que la llamamos recta de números reales.

En la siguiente recta real se representan algunos números.



Detengámonos un momento en la lectura del módulo, ¿qué hemos planteado hasta aquí?

En la figura 1 se muestran las sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos, hasta llegar al conjunto de los números reales.

LOS NÚMEROS REALES

Números naturales (N) o enteros positivos (Z^+)

Lo simbolizamos $N: \{1,2,3,\cdots\}$ ó $\{x/x \in N\}$

El cero 0

Enteros negativos (Z^-) $Z^-: \{\cdots,-4,-3,-2,-1\}$

Enteros (Z), formado por la unión de los números naturales, el cero y los números enteros negativos:

Lo simbolizamos $Z = Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$

$$Z: \{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\} \text{ ó } \{x/x \in Z\}$$

Números racionales (Q) formado por la unión de los números enteros (Z) con los fraccionarios (F). $Q = Z \cup F$

Es decir, todos los números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros, con $q \neq 0$, cuya representación decimal es un número exacto o poseen infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente.

Números irracionales (I), aquellos representados por números decimales que poseen infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

Números reales ($\mathbb{R}$), formado por la unión de los racionales e irracionales

$$\mathbb{R} = Q \cup I$$

Fig. 1. Esquema Conjunto de Números Reales

Recordemos las principales CARACTERÍSTICAS del conjunto de números reales:

- ✓ Es infinito.
- ✓ No tiene primer ni último elemento.
- ✓ Es un conjunto denso, pues entre dos números reales existe siempre un número infinito de números reales.
- ✓ El conjunto de números reales completa la recta numérica ya que, si sobre una recta fijamos un origen y un segmento unidad, a cada número real corresponde un punto en la recta y a todo punto de la recta corresponde un número real.

A modo de síntesis, podemos realizar el siguiente **ESQUEMA DEL CAMPO NUMÉRICO REAL**.

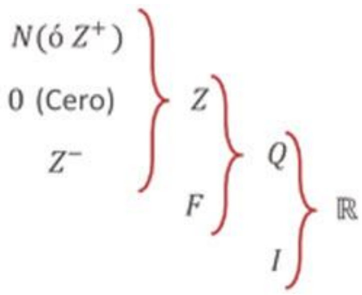


Fig. 2. Campo Numérico Real

Vuelve a revisar los números que mencionaste al comienzo del Módulo, ¿puedes identificar a qué conjunto numérico pertenecen dentro de los reales?

Con este conjunto de números trabajaremos en este curso. Los invitamos ahora a resolver las siguientes actividades, retomando los conceptos vistos hasta aquí.

Actividad 1:

Escribe a qué conjunto numérico Q (racional) o I (irracional) pertenece cada uno de los siguientes números:

$\sqrt{2} \in$; $-2 \in$; $1{,}434343 \ldots \in$; $0{,}123456\ldots \in$

$1{,}1415 \in$; $\frac{3}{5} \in$; $-\frac{5}{3} \in$; $132 \in$

$1{,}8\hat{9} \in$ $-2{,}565758\ldots \in$; $\sqrt[3]{7} \in$; $\sqrt{81} \in$

Actividad 2:

Traza una recta, fija el origen y un segmento unidad, y representar los siguientes números reales:

$$-3 \;;\; 2{,}5 \;;\; \frac{4}{3} \;;\; -\frac{1}{2} \;;\; \pi$$

Para trabajar con un conjunto numérico debemos tener presente las propiedades de las operaciones que se verifican en él, por ello repasaremos brevemente las que se verifican en el conjunto de los números reales.

1.3. Propiedades de las operaciones con números reales

Muchos de los errores que se cometen al operar con números reales surgen por desconocimiento u olvido de algunas de ellas.

Damos a continuación las propiedades básicas de las operaciones con números reales.

Comencemos con las **PROPIEDADES DE LA SUMA Y EL PRODUCTO DE NÚMEROS REALES**.

Para todos los números reales a, b y c, se cumplen las siguientes propiedades.

PROPIEDADES	EJEMPLO
$a + b = b + a$	$2 + 3 = 3 + 2$
$a \cdot b = b \cdot a$	$5 \cdot (-3) = (-3) \cdot 5 = -15$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$
$a + 0 = a$ y $0 + a = a$	$3 + 0 = a$ y $0 + 3 = 3$
$a \cdot 0 = 0$ y $0 \cdot a = 0$	$2 \cdot 0 = 0$ y $0 \cdot 2 = 0$
$a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$	$5 \cdot 1 = 5$ y $1 \cdot 5 = 5$
$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$4 + (-4) = (-4) + 4 = 0$
$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ y $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ si $a \neq 0$	$7 \cdot \frac{1}{7} = 1$ y $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	$5 \cdot (2 - 4) = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 4$

De todas las propiedades que hemos enunciado, trataremos especialmente algunas de las que ocasionan más errores al operar con dicho conjunto de números.

Comenzaremos con la:

1.3.1 Propiedad asociativa de la suma y el producto

En símbolos la propiedad se escribe:

$$\forall a, b\ y\ c \in \mathbb{R}: (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad (a.b).c = a.(b.c)$$

Significa que, tanto en la suma como en el producto, los números pueden agruparse en cualquier orden.

Veamos algunos ejemplos:

✓ $2+3+4=(2+3)+4=2+(3+4)=9$

✓ $10\,.\,3\,.\frac{1}{2}=10\,.\left(3\,.\frac{1}{2}\right)=(10\,.\,3)\,.\frac{1}{2}=15$

Sin embargo, la propiedad asociativa no se verifica en el caso de la división, ni de la diferencia:

$$(16:4):2=4:2=2 \qquad \neq \qquad 16:(4:2)=16:2=8$$

$$(10-5)-3=5-3=2 \qquad \neq \qquad 10-(5-3)=10-2=8$$

Advierte que ni la resta ni la división tienen esta propiedad, y esto es porque el orden en que se agrupan los números altera el resultado.

Otra de las propiedades de las operaciones con números reales que aplicaremos frecuentemente es la:

1.3.2 Propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta

Como su nombre lo indica, "distribuye" la operación producto "dentro" de la suma o la resta.

En símbolos la propiedad se escribe:

$\forall a, b\ y\ c \in \mathbb{R}: a.(b+c)=a.b+a.c$ o $(b+c).a=b.a+c.a$

y

$a.(b-c)=a.b-a.c$ o $(b-c).a=b.a-c.a$

Establece que si un número multiplica a la suma (ó resta) de otros, es posible resolver la suma (ó resta) y luego multiplicar el resultado por el factor ó multiplicar el factor por cada término de la suma (ó resta) y por último sumar (ó restar) los resultados parciales.

Esta última opción es la que aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (ó resta) de números reales.

Veamos algunos ejemplos en los que efectuamos las opciones descriptas precedentemente para que se aprecie que se arriba al mismo resultado.

$2\,(3+5)=2\,.\,3+2\,.\,5=6+10=16$ → **Distribuimos el factor 2**

$2\,.\,8=16$ → **Resolvimos primero el paréntesis**

$\frac{1}{4}.(32-12+4)=\frac{32}{4}-\frac{12}{4}+\frac{4}{4}=8-3+1=6$ → **Distribuimos $\frac{1}{4}$**

$\frac{1}{4}.(24)=\frac{24}{4}=6$ → **Resolvimos primero el paréntesis**

¡Advierte!
En el tercer ejemplo se incluyeron más de dos términos en el paréntesis para mostrar que también es aplicable la propiedad distributiva del producto a la suma algebraica.
Además, el número real que multiplica al paréntesis es un número fraccionario por lo que, recuerda que su numerador multiplica a cada término del paréntesis y su denominador lo divide.

La propiedad anterior establece que el producto es distributivo respecto a la suma, por lo que no hay que confundir la propiedad en el otro sentido: La suma **NO es distributiva** respecto al producto. Es decir que si la operación a realizar es $2+(3.5)$, no confundirse queriendo aplicar la propiedad.

Veamos a través de los dos procedimientos (uno correcto y el otro incorrecto) que los resultados a los que se arriba son diferentes.

Procedimiento correcto		Procedimiento incorrecto	
$2+(3.5)$	$\neq$	$(2+3).(2+5)$	Se distribuyó erróneamente la suma
$2+15$	$\neq$	$5\ .\ 7$	
17	$\neq$	35	

se debe resolver la operación indicada dentro del paréntesis y luego se le suma el término que está fuera del paréntesis.

Seguidamente enunciamos otras propiedades que se relacionan con la regla de los signos y que sería importante recordar. Si a, b, c y d son números reales, (distintos de cero cuando figuran como denominador):

PROPIEDADES	EJEMPLO
$a-(-b)=a+b$	$2-(-3)=2+3=5$
$(-1)\cdot a=-a$	$(-1)\cdot 4=-4$
$-(a+b)=-a-b$	$-(2+5)=-2-5=-7$
$-(a-b)=-a+b$	$-(3-4)=-3+4=1$
$-(-a)=a$	$-(-9)=9$
$(-a)\cdot b=-ab$	$(-8)\cdot 6=-8.6=-48$
$(-a)\cdot(-b)=ab$	$(-2)\cdot(-4)=2.4=8$
$-a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$	$-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$
$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-3}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

Por último, recordamos las siguientes propiedades:

PROPIEDADES	EJEMPLO
$\frac{0}{a} = 0 \text{ con } a \neq 0$	$\frac{0}{3} = 0$
$a\left(\frac{b}{a}\right) = b$	$4\left(\frac{5}{4}\right) = 5$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2.3}{5.4}$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a.c}{b.c} = \frac{a}{b}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2.3}{5.3} = \frac{2}{5}$

Esta última propiedad constituye la PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES según la cual, si multiplicamos o dividimos numerador y denominador de una fracción por un mismo número (excepto el 0), obtenemos una fracción equivalente a la dada.

PROPIEDADES	EJEMPLO
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	$\frac{2}{4} \pm \frac{3}{4} = \frac{2 \pm 3}{4}$
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$	$\frac{2}{4} \pm \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 \pm 3 \cdot 4}{4 \cdot 5}$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}$

Esta última propiedad, corresponde a un cociente de fracciones, que se resuelve realizando el producto de extremos sobre producto de medios, o también convirtiendo el cociente en multiplicación de la fracción que figura como numerador por la fracción inversa que figura en el denominador.

Hemos recordado al conjunto de los números reales, sabemos qué operaciones podemos hacer con ellos y repasamos algunas de las propiedades más importantes.

¿Estamos en condiciones de comenzar a realizar operaciones con ellos y aplicar sus propiedades?

Creemos que sí, no obstante, nos parece importante que previo a ello te advirtamos sobre errores que por su frecuencia justifican que nos detengamos a considerarlos.

La revisión de algunos procedimientos que frecuentemente ocasionan errores permitirá que reflexionemos sobre ellos para poder evitarlos.

La manipulación de números reales es esencial para tener éxito en matemática.

1.4. Recomendaciones al operar con números reales

En este apartado nos detendremos especialmente en analizar los errores que comúnmente se cometen al operar con números reales.

¡ATENCIÓN CON LOS SIGNOS!

En muchos casos la aparición del signo menos (–) requiere un poco más de atención. Para que puedas advertirlo te plantearemos las siguientes situaciones:

Si la operación a realizar es:

1 $\mathbf{3 + (5 - 2) = 3 + 5 - 2 = 6}$ → (El paréntesis puede suprimirse sin ninguna consecuencia)

2 $\mathbf{3 \; + \; 3 \; = \; 6}$ → (Obtenemos lo mismo si resolvemos dentro del paréntesis)

En cambio, si el paréntesis está precedido de un signo menos (–), para suprimirlo debe cambiarse el signo de **todos** los términos de la expresión que figura dentro del paréntesis:

3 $\mathbf{3 - (5 - 2) = 3 - 5 + 2 = 0}$ → (El paréntesis puede suprimirse cambiando los signos)

4 $\mathbf{3 \; - \; 3 \; = \; 0}$ → (Si resolvemos dentro del paréntesis obtenemos el mismo resultado)

Este procedimiento surge de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, ya que el signo menos representa el factor (-1) que al multiplicar a cada término del paréntesis le cambia el signo por aplicación de la ley de los signos.

¡ADVIERTE lo que hubiera sucedido si eliminamos el paréntesis sin cambiar los signos!

Procedimiento incorrecto.

$\mathbf{3 - (5 - 2) = 3 - 5 - 2 = -4}$

No se cambiaron los signos al suprimir el paréntesis

La llamada Ley de los signos se aplica tanto para el producto como para el cociente de números reales

LEY DE LOS SIGNOS	
Producto	**Cociente**
$(+) \cdot (+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(-) \cdot (-) = +$	$(-) : (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$	$(-) : (+) = -$

A continuación, te compartimos los siguientes ejemplos:

$(-3)\,(-5) = 15$

$(-1)\,.\,5\,.\,(-2)\,.\,\frac{1}{2}\,.\,(-3) = -15$

$\frac{(-4)\,.\,3\,.\,(-2)}{(-6)} = -4$

En este ejemplo se combinaron productos con cocientes.

Es importante tener cuidado con los signos, sobre todo en aplicaciones donde un signo erróneo nos estaría informando, por ejemplo, de la existencia de Ganancias cuando en realidad hay Pérdidas o viceversa.

Otro elemento que suele provocar errores es la aparición del cero, por ello también te decimos:

¡CUIDADO CON EL CERO!

Antes de avanzar, piensa y responde: ¿es posible efectuar las siguientes divisiones: $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{a}$, con $a \neq 0$?

....

....

Si aparece el cero como factor de un producto, cualquiera sea el número o el signo de los demás factores, anula todo el resultado.

¡PRECAUCIÓN! Cuando intervienen más de dos factores se debe prestar atención a los signos que van asumiendo los resultados parciales.
Si hay un número impar de factores negativos el resultado será negativo, si el número de factores con signo negativo es par, el resultado será positivo.

En general, el cero dividido por cualquier otro número, da como resultado 0, con la sola excepción de que el denominador también sea cero, ya que la expresión $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ no tiene solución.
Si el cero aparece como divisor de cualquier cociente, la operación NO tiene solución.

Si aparece en un cociente como dividendo, también el resultado es nulo.

Veamos los siguientes ejemplos:

$$3\,.\,50\,.\,(-2).\,0\,.\left(-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$0:3=\frac{0}{3}=0$$

Los siguientes ejemplos muestran que: **Si el cero aparece como divisor de un cociente, la operación NO tiene solución.**

$-\frac{2}{0}$ **NO TIENE SOLUCIÓN**

No hay ningún real que multiplicado por cero nos de -2

$\frac{(-1)\,.(-3)\,.\,15}{2\,.\,0\,.\,(-4)}$ **NO TIENE SOLUCIÓN**

Tampoco pudimos resolver este último cociente porque el cero anula el denominador y como la división por cero no existe, el cociente no puede resolverse.

Controla tu respuesta después de lo que acabas de leer. Otro error muy frecuente se comete al intentar simplificar, es por ello que también te recomendamos:

¡PRECAUCION AL SIMPLIFICAR!

Las simplificaciones suelen complicarse cuando trabajamos con números fraccionarios. Esto es a causa de que la aparición de numeradores y denominadores combinados en distintas operaciones, promueven simplificaciones de la expresión que no siempre son las correctas.

Como regla general, en cuanto a la simplificación de fracciones, podemos afirmar que en la multiplicación de fracciones es posible simplificar numeradores con denominadores; en cambio, si se las divide, es posible simplificar numeradores y denominadores entre sí.

Recuerda que al multiplicar fracciones se obtiene una nueva fracción cuyo numerador es el resultado de multiplicar los numeradores y su denominador, el producto de los denominadores.

Resolvamos el siguiente producto de Fracciones:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{5\,.\,4}{3\,.\,5} = \frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{4}{3}$$

Hemos simplificado por 5, numerador y denominador

También se pudo haber simplificado antes de efectuar la operación

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{3}\cdot\frac{4}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{4}{3}$$

Los dos procedimientos de simplificación son correctos y permiten arribar a igual resultado.

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{9} = \frac{2\,.\,9}{3\,.\,4} = \frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{3}{2}$$

Hemos simplificado por 6, numerador y denominador

También se pudo haber simplificado numeradores y denominadores entre sí, previo a efectuar el cociente y el resultado hubiese sido el mismo.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}:\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{1\,.\,3}{1\,.\,2} = \frac{3}{2}$$

La misma operación pudo estar indicada con línea de fracción

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{3}{2}$$

Multiplicamos extremos y lo dividimos por el producto de los medios, por último, simplificamos por 6, numerador y denominador.

También se pudo haber simplificado antes de efectuar el cociente, extremos con medios.

Si se trata de una división de fracciones, se resuelve multiplicando el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda para formar el numerador del resultado y dividiéndola por el producto entre el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

Estas simplificaciones que redujeron en forma correcta, multiplicaciones y divisiones de fracciones, suelen trasladarse, erróneamente a operaciones de suma y resta de fracciones.

Veamos un ejemplo de suma de fracciones en donde cometimos un error muy común:

Procedimiento incorrecto.

$$\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{5}$$

Es frecuente, el tratar de simplificar el 2 con el 4, por ser ambos divisibles por 2 y aparecer como numerador y denominador respectivamente, sin advertir que en este caso las fracciones están sumadas y que deberá resolverse sacando común denominador.

La única simplificación válida en operaciones de suma y resta de fracciones es cuando es posible reducir el numerador con el denominador de la misma fracción, y luego se resuelve a través del procedimiento de suma o resta de fracciones.

Veamos el **procedimiento correcto** del ejemplo dado:

✓ $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=\frac{}{10}$ → **Primero buscar un denominador común que sea divisible por ambos denominadores**

$(10:2).1=5$ y $(10:5).4=8$

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=\frac{5+8}{10}=\frac{13}{10}$$

→ **Segundo, dividir ese denominador común por cada denominador para luego multiplicarlo por el numerador respectivo**

Resolvemos la suma en el numerador

El proceso inverso también puede realizarse

Por ejemplo:

✓ $\frac{-1+3+11-2}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{11}{5}-\frac{2}{5}$ → Si tenemos operaciones de suma o resta en el numerador con un denominador en común, podemos distribuir ese denominador en cada término del numerador

Si en el numerador tenemos un producto con un denominador común ¡CUIDADO!, el denominador no se distribuye en ese producto.

Observa el siguiente ejemplo:

$$\frac{5\,.\,8}{10}\neq\frac{5}{10}\cdot\frac{8}{10} \quad ; \quad \frac{40}{10}\neq\frac{40}{100}$$

Hemos visto que podemos distribuir un mismo denominador en una suma, pero si la suma está en el denominador, ¿es posible distribuir ese numerador?

¡ATENCIÓN! No es posible efectuar esa distribución.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{2+5}=\frac{3}{7} \quad \neq \quad \frac{3}{2}+\frac{3}{5}=\frac{15+6}{10}=\frac{21}{10}$$

Observaciones para resolver actividades.

ATENCIÓN: Para resolver la suma o resta de fracciones se debe sacar común denominador. Nunca debes simplificar el denominador de un término con el numerador del otro término.

CUIDADO: Los signos + y – separan términos.

RECUERDA: Cuando tienes un factor que multiplica a una suma o resta debes aplicar la propiedad: **Distributiva** del producto con respecto a la suma o a la resta.

RECUERDA: siempre debes prestar atención cuando operes con números, pero presta especial atención cuando adviertas signos negativos, el cero, cuando quieras simplificar y cuando aparezcan fracciones.

Teniendo en cuenta las propiedades que repasamos, te proponemos resolver las actividades siguientes, comenzando con operaciones combinadas sencillas.

Actividad 3

Resuelve las siguientes operaciones con números reales:

a) $\frac{2}{3} + 9 =$

b) $\frac{5}{3} . 9 - \left(-\frac{1}{4}\right) =$

c) $4. (-2 + 5) =$

Actividad 4

Identifica el error que se cometió en cada caso para arribar al resultado indicado y obtiene el resultado correcto:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$

b) $-2 . (3 - 5) = -11$

Avanzando un poco más con las operaciones con números reales, incluimos en este repaso los exponentes y radicales.

1.5. Exponentes y radicales.

¿Recuerdas qué operación indica una potencia con exponente entero?

La expresión 2^3 es una potencia de base 2 y exponente 3 que se resuelve multiplicando tantas veces la base como lo indica el exponente. Por ello:

$$2^3 = \underbrace{2 . 2 . 2}_{\substack{Multiplicamos \\ 3\ veces\ el\ 2}} = 8$$

Recordemos las **PROPIEDADES BASICAS DE LOS EXPONENTES**.

A veces suele confundirse la potencia con un simple producto y se resuelve 2^3 INCORRECTAMENTE como $\mathbf{2 . 3 = 6}$

PROPIEDADES	EJEMPLO
$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$	$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\ factores}$
$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$	$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$ $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$
$x^0 = 1$ si $x \neq 0$	$2^0 = 1$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\ factores}}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
$\frac{1}{x^{-n}} = x^n$	$\frac{1}{x^{-5}} = x^5$ $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}}$	$\frac{2^{12}}{2^8} = 2^{12-8} = 2^4 = 16$ $\frac{2^8}{2^{12}} = 2^{8-12} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$
$\frac{x^m}{x^m} = x^{m-m} = x^0 = 1$	$\frac{2^4}{2^4} == 1$
$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$(x^5)^3 = x^{5 \cdot 3} = x^{15}$ $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
$(x \cdot y)^n = x^n y^n$	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 4^3$
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Veamos un ejemplo en el que aparece una potencia en uno de los factores de un producto:

✓ $(-8).\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$

Como el exponente afecta solo a uno de los factores, primero se debe resolver la potencia y luego multiplicar ese resultado por el otro factor (-8)

En este producto no es posible simplificar el 2 con el (-8) ya que el 2 está afectado por el exponente 4 y el (-8) no lo está.

La potencia es distributiva respecto del cociente y del producto, por lo que, podemos distribuir el exponente 4 en el numerador y en el denominador de la fracción

$$(-8)\,.\,\frac{1^4}{2^4} =$$

Resolvemos las potencias obtenidas

$$(-8)\,.\,\frac{1}{16} =$$

$$(\overset{-1}{\cancel{-8}})\,.\,\frac{1}{\underset{2}{\cancel{16}}} = -\frac{1}{2}$$

Y por último simplificamos

Hemos recordado cómo se resuelven las potencias de exponente entero positivo, pero ¿qué sucede si el exponente es cero o un número entero negativo?

TODO número (excepto el cero) elevado al exponente 0, da por resultado 1.

Ejemplos:

- ✓ $15^0 = 1$
- ✓ $\left(-\frac{3}{2}\right)^0 = 1$
- ✓ 0^0 **NO TIENE SOLUCIÓN**.

Si, en cambio, el exponente de la potencia es un número entero negativo, el procedimiento correcto para resolverlo consiste en elevar al inverso multiplicativo de la base al mismo exponente, pero con signo positivo.

¿Recuerdas cómo se obtienen los inversos multiplicativos o recíprocos?

El recíproco de $\frac{5}{4}$ es $\frac{4}{5}$

El de 3 es $\frac{1}{3}$

El de -3 es $-\frac{1}{3}$ (advierte que no cambiamos el signo)

El de 1 es $\frac{1}{1} = 1$

El de 0 **NO EXISTE** porque sería $\frac{1}{0}$ y la división por cero no está definida.

Resolvamos, por ejemplo, una potencia con exponente negativo.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$

Veamos otro ejemplo combinando el producto y el exponente negativo.

$$\left[(-7)\,.\frac{2}{3}\right]^{-2} =$$

$$= (-7)^{-2}\,.\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$$

Como la potencia es distributiva respecto del producto, primero se distribuyó el exponente (-2) en cada uno de los factores de la base

$$= \left(-\frac{1}{7}\right)^{2}\,.\,\left(\frac{3}{2}\right)^{2} =$$

Como el exponente de las potencias tiene signo negativo se tomó el recíproco de cada factor y se lo elevó al exponente 2.

$$= \frac{1}{49}\,.\,\frac{9}{4} = \frac{9}{196}$$

Aclaración: también se pudo haber resuelto este ejemplo de esta otra forma:

$$\left[(-7).\frac{2}{3}\right]^{-2} =$$

$$= \left(-\frac{14}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{14}\right)^{2} = \frac{9}{196}$$

Primero se resuelve el producto dentro del corchete, luego se eleva a (-2) este resultado parcial; como el exponente (-2) es negativo, se eleva al exponente 2 el recíproco del resultado parcial y por último se calcula la potencia.

A medida que se van combinando operaciones, se acrecienta la posibilidad de cometer errores, sobre todo al operar con signos y al efectuar simplificaciones incorrectas, por ello es conveniente realizar paso a paso cada operación, por lo menos hasta adquirir la práctica suficiente.

Hemos recordado cómo se resuelve una potencia que tiene por exponente un número entero, pero ¿qué sucede si en la potencia aparece un exponente fraccionario?; ¿Cómo resolvemos, por ejemplo, la potencia $4^{3/2}$?

PROCEDIMIENTO: una potencia de exponente fraccionario da origen a una raíz de índice igual al denominador de la fracción y que tiene como radicando a la base de la potencia, que queda elevada a un exponente igual al numerador de la fracción.

En nuestro ejemplo $4^{3/2} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8$

La potencia de exponente fraccionario da origen a una raíz.

Extraer la raíz a un número es encontrar otro, tal que elevado al índice de la raíz permita obtener el radicando. Es decir que, para resolver estas potencias de exponentes fraccionarios, debemos saber resolver raíces.

Recordemos, entonces, las **PROPIEDADES BASICAS DE LOS RADICALES**

PROPIEDADES	EJEMPLO
$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$ $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$	$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{9 \cdot 2} = \sqrt[3]{18}$ $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$	$\frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{80}{10}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m, m \neq n$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$	$\left(\sqrt[8]{7}\right)^8 = 7$

Resolvamos mentalmente algunas raíces sencillas:

1 $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

2 $\sqrt[4]{81} = 3$

3 $\sqrt[5]{1} = 1$

4 $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

- Cuando no se indica el índice de la raíz, se interpreta que el índice es 2 (también se la conoce como raíz cuadrada).
- La radicación al igual que la potencia es distributiva con respecto al producto y al cociente.

Veamos un ejemplo de combinaciones sencillas de exponentes y radicales:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} =$$

Iremos resolviendo paso a paso las operaciones, para que se adviertan los pasos que vamos ejecutando:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 16}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}}$$

Para resolver el producto del numerador, primero se debe extraer la raíz cúbica de uno de los factores $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ **y resolver la potencia del otro factor** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^{2} = 16.$

Mientras tanto, en el denominador se deberá resolver la raíz cuadrada de la suma $\sqrt{1+\frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{4+5}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ **y luego multiplicar el resultado por** $\frac{1}{6}$

¡ATENCIÓN!

La radicación al igual que la potenciación NO es distributiva respecto de la suma, por lo que primero se debe resolver la suma y luego extraerle la raíz al resultado parcial.

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1+\frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}_{1}} \cdot \cancel{16}^{8}}{\frac{\cancel{3}^{1}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_{2}}} = \frac{8}{\frac{1}{4}} = 32$$

Simplificando los productos de fracciones y resolviendo la última fracción obtenida, se llega al resultado definitivo

Hasta aquí hemos desarrollado un breve repaso de las operaciones con números reales, describiendo a través de ejemplos los procedimientos más comunes y advirtiendo sobre los errores más frecuentes.

Para que ejercites los temas vistos, te proponemos resolver las siguientes operaciones con números reales:

Actividad 5

Resuelve las siguientes operaciones con números reales:

a) $\frac{2}{3}.\frac{5}{3}+\frac{1}{5}:3-\frac{1}{5}.5=$

b) $\frac{1}{9}.\frac{3}{2}-\frac{1}{7}.\frac{7}{3}+\frac{1}{2}.\left(-\frac{3}{4}\right)=$

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\frac{5}{14}-\frac{2}{7}+1=$

d) $\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)+\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=$

e) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}.\left(\frac{3}{4}\right)^{2}:\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=$

f) $(-2)^{-2}.(-2)^{-3}:(-2)^{-1}=$

g) $\frac{2^7:2^4:2^{-3}}{(2^4\,.\,2^5)^2:2^7}=$

h) $\sqrt[4]{(-2)^{-6}\,.\,(-2)^8\,.\,(-2)^2}=$

i) $\sqrt{\frac{49}{121}}\,.\sqrt{\frac{25}{4}-4\,.\left(\frac{7}{22}\right)^{-1}}=$

j) $\left(\frac{9}{5}\right)^{-1}+\left(\frac{9}{5}\right)^{2}.\left(\frac{9}{5}\right)^{-1}-\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\,.\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}=$

k) $\frac{3-\frac{1}{2}}{-\left(\frac{2}{3}-2\right)}=$

l) $\frac{\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{11}{5}}=$

m) $\frac{-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)}{-1}=$

n) $\frac{\left(2-\frac{3}{4}\right)^2-3}{\left(\frac{1}{3}+4^2\right)^{-1}}=$

o) $\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)^2}{3\,.\left(1-\frac{1}{12}\right)}+\frac{7}{9}=$

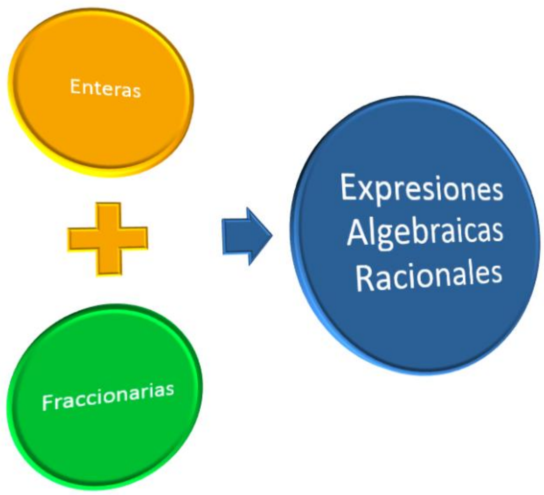
p) $\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}{\sqrt{\frac{11}{25}+1}}.(-12)=$

q) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^4}\,.\frac{1}{(-3)^3}\,.(-2)^3\,.\frac{(3)^{-2}}{(2)^{-1}}=$

r) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)^{-2}:\frac{6}{7}-\sqrt[3]{1-\frac{7}{8}}+\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=$

II Expresiones Algebraicas

Si combinamos los conjuntos numéricos vistos anteriormente, con la idea de variable (una letra como número generalizado) llegamos al concepto de ÁLGEBRA.



El cálculo algebraico nace como una generalización del modelo numérico.

Así como para trabajar con modelos aritméticos ó numéricos tuvimos que aprender a realizar cálculos con números, para trabajar con un modelo algebraico debemos ser hábiles en cálculos con variables. Por ello en esta segunda parte se combinarán números representados con símbolos, a través de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación ó extracción de raíces.

Objetivos:

- ✓ Operar con expresiones algebraicas enteras.
- ✓ Utilizar productos especiales.
- ✓ Establecer las reglas básicas de factorización y aplicarlas para factorizar expresiones.
- ✓ Simplificar, sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas racionales

Para lograrlos te proponemos los siguientes:

Contenidos:

2.1. Expresiones algebraicas racionales

En esta Unidad, vamos a trabajar con expresiones algebraicas, que son aquellas en las que figuran números y letras relacionadas por las operaciones aritméticas.

De acuerdo con las operaciones que intervienen, se las clasifican en expresiones algebraicas racionales e irracionales.

Nos dedicaremos al repaso de las expresiones racionales.

Las expresiones algebraicas **RACIONALES** son aquellas en las cuales algunas de sus variables forman parte del denominador o figuran en el numerador con exponente entero.

Por ejemplo, son expresiones algebraicas **racionales**:

$$x + \frac{1}{y} \quad ; \quad 3x^{-3} + 2 \; ; \quad x^2 - 4$$

A su vez las Expresiones Algebraicas Racionales se dividen en dos grupos: las **Enteras** y las **Fraccionarias**.

Comenzaremos con las Expresiones Algebraicas Enteras:

2.1.1. Expresiones algebraicas enteras

Se llama expresión algebraica entera a toda combinación de números y letras relacionadas a través de las operaciones de **adición**, **sustracción**, **multiplicación** y **potenciación** con exponente natural. Por ende, en estas expresiones no aparece ninguna letra en el denominador ni afectada por una raíz o por un exponente negativo.

Ejemplos de expresiones algebraicas enteras:

- ✓ $3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ es una expresión algebraica **entera** en la variable x.
- ✓ $(x + y)^3 - x.y$ es una expresión algebraica **entera** en las variables x e y.

Clasificación de expresiones algebraicas enteras

Las expresiones algebraicas enteras las clasificamos en monomios y polinomios:

Monomio: Es toda expresión algebraica entera constituida por un sólo término. Las letras solamente están afectadas por operaciones de producto y de potencia de exponente natural.

Por Ejemplo: $-3a^3b^2c$

Es un monomio constituido por el número negativo, -3, que recibe el nombre de "coeficiente" y la "parte literal": a^3b^2c. Puede observarse que las operaciones involucradas son la multiplicación y la potencia de exponente natural.

Monomios semejantes: Son los que tienen igual parte literal (las mismas letras elevadas a los mismos exponentes).

Por Ejemplo: $-3a^3b^2c$ es semejante a $5a^3b^2c$

Polinomio: Es una expresión algebraica entera compuesta por la suma algebraica (suma y/o resta) de monomios no semejantes.

Por ejemplo: $3ax^3 + 2bx^2 - 5x + 8$

Es posible realizar operaciones con las expresiones algebraicas enteras, aplicando las mismas propiedades que vimos en los modelos numéricos.

2.1.1.1. Operaciones con expresiones algebraicas enteras

Comencemos con las **SUMAS ALGEBRAICAS**

PROCEDIMIENTO: Primero se suman los monomios semejantes que, como dijimos, son aquellos que tienen la misma parte literal y difieren sólo en sus coeficientes. Luego de esta asociación, obtenemos la suma de monomios no semejantes, dando por resultado el polinomio.

Algunos ejemplos:

$$2xy^3 + 5xy^3 = 7xy^3$$

Sumamos los monomios semejantes

✓ $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$

Como en este caso existen paréntesis que agrupan términos, lo primero que debemos hacer es suprimirlos, recordando que si están precedidos por el signo más (+) las operaciones indicadas dentro del paréntesis siguen igual y si las precede un signo menos (-) se deberán cambiar los signos comprendidos dentro del paréntesis

$3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3 =$

Asociamos los términos semejantes: $3x^2y$ con $4x^2y$; $-2x$ con $6x$, 1 con -3 y los sumamos.

$= 7x^2y + 4x - 2$

Resultado final, al no poder seguir operando con la expresión

Otro ejemplo más:

✓ $-2xy + y^2 + 5 - (3y^2 + xy) + x =$

Suprimimos el paréntesis cambiando el signo de los términos que figuran dentro de él

$= -2xy + y^2 + 5 - 3y^2 - xy + x =$

Sumamos o restamos los términos semejantes

$= -3xy - 2y^2 + 5 + x$

Este último es el resultado final ya que no es posible realizar ningún otro cálculo con términos que NO son semejantes.

Avanzando con otras operaciones, veremos la **MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS**.

PROCEDIMIENTO: la propiedad distributiva es la herramienta clave para multiplicar expresiones algebraicas. Se las resuelve multiplicando término a término y por último se suman los términos semejantes.

Veamos un ejemplo en el que se multiplican dos expresiones algebraicas:

✓ $(2x + y)(-y + x) =$

Se realiza el producto de una de las sumas por la otra, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma

$= 2x(-y) + 2xx + y(-y) + yx =$

Se aplica regla de signos del producto y propiedades del producto de potencias de igual base

$= -2xy + 2x^2 - y^2 + yx =$

Se asocian y suman o restan los términos semejantes

$= -xy + 2x^2 - y^2$

Otro ejemplo:

✓ $(x - 1)(x^3 - y + xy) =$

Comenzamos multiplicando los términos del primer paréntesis por los del segundo o a la inversa porque el orden de los factores NO altera el producto.

$= xx^3 - xy + xxy - 1x^3 + 1y - 1xy$

Efectuamos el producto de la x del primer paréntesis por cada término del segundo paréntesis (prestar atención a los signos) y luego hacemos lo mismo con el -1.

$= x^4 - xy + x^2y - x^3 + y - xy =$

Se resuelven los productos de cada término cuando sea posible: $xx^3 = x^4$; $xxy = x^2y$, sumando o restando los términos semejantes.

$= x^4 - 2xy + x^2y - x^3 + y$

Actividad 6

Resuelve las siguientes operaciones con expresiones algebraicas:

a) $x + x =$

b) $x^2 + x^2 =$

c) $2x + 2x =$

d) $2x^2 + 2x^2 =$

e) $x.x =$

f) $x^2.x^2 =$

g) $2x.2x =$

h) $2x^2.2x^2 =$

i) $(2x + 5).(-8x + 4) =$

j) $2x^2 + 5x + 2 - (4x^2 - 3x) =$

Actividad 7

Completa el siguiente cuadro, con las operaciones indicadas:

M	N	$M+N$	$M-N$	$M\cdot N$
$2x^3$	$-\frac{5}{2}x^3$			
$5a^5$	$5a^2$			

Actividad 8

Dadas las expresiones algebraicas enteras (o polinomios en x):
$P(x) = -5 + 2x^3 + 4x^2$ y $Q(x) = 3x^4 + x - x^2$, calcula: $P(x) \,.\, Q(x)$

2.1.1.1.1. Productos notables.

Hay productos de expresiones algebraicas que por la frecuencia con que aparecen se los denomina **ESPECIALES** ó **NOTABLES** y que por el mismo motivo es muy conveniente incluirlos en este repaso.

CUADRADO DE UN BINOMIO

En símbolos:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Binomio: porque es la suma (ó resta) de dos términos no semejantes.
Cuadrado: porque aparece elevado al exponente 2.

PROCEDIMIENTO: el resultado es el cuadrado del primer término más (ó menos) el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Procedimiento correcto	Procedimiento incorrecto
$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	$(x+a)^2 = x^2 + a^2$
	Porque la potencia NO es distributiva con respecto a la suma (ó la resta).

El procedimiento correcto surge de multiplicar término a término la expresión algebraica de la base por sí misma:

- ✓ $(x+a)^2 = (x+a).(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$
- ✓ $(x-a)^2 = (x-a).(x-a) = x^2 - 2ax + a^2$

Desarrollemos el cuadrado del siguiente binomio:

$$(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

Actividad 9

Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(2-x)^2 =$

b) $(2x+1)^2 =$

PRODUCTO DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA

En símbolos:

$$(x+a).(x-a) = x^2 - a^2$$

Esta igualdad puede verificarse efectuando la multiplicación y cancelando los términos iguales con signos opuestos:

$$(x+a).(x-a) = x^2 - xa + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

PROCEDIMIENTO: La suma por la diferencia de dos bases es igual a la diferencia de los cuadrados de las bases.

Por ejemplo:

$$5(x+2).(x-2) = x^2 - 4$$

Los productos notables son igualdades que se denominan **identidades**, dado que se verifican para **cualquier valor** que se les asignen a sus letras.

También es frecuente que se deba desarrollar el procedimiento inverso de escribir la expresión algebraica como producto de sus factores utilizando:

2.1.1.1.2. Reglas de factorización

Las más utilizadas son:

FACTOR COMÚN

En símbolos:

$$ax + ay = a.(x + y)$$

Es decir, se trata de la recíproca de la propiedad distributiva del producto respecto a la suma (ó a la resta).

Por ejemplo:

✓ $2x^2 + 4x = 2x.(x + 2)$

Como la expresión $2x$ se repite en los dos términos, se extrae como factor común, que multiplica a $(x + 2)$.

La expresión $(x + 2)$ se obtiene de dividir cada término del primer miembro por el factor común, así: $2x^2 \div 2x = x$ y $4x \div 2x = 2$

FACTOR COMÚN EN GRUPOS

En símbolos:

$$acx^3 + adx^2 + bcx + bd = ax^2.(cx + d) + b.(cx + d)$$

$$= (cx + d).(ax^2 + b)$$

En lugar de presentar un factor común en toda la expresión, se presenta el factor común en grupos de igual número de términos.

Por ejemplo:

✓ $3y^3 + 12y^2 - 2y - 8 =$

En este caso, de los dos primeros términos se extrae como factor común $3y^2$, y de los dos últimos términos el factor común es (-2).

$= 3y^2(y + 4) - 2(y + 4) =$

$= (y + 4).(3y^2 - 2)$

Si observamos los paréntesis, queda la misma expresión $(y + 4)$, la que ahora pasa a ser factor común de los dos términos, obteniéndose el producto final

Actividad 10

Factoriza las siguientes expresiones.

a) $4x^5 + 4x =$

b) $6x^3 - 16 + 24x^2 - 4x =$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

En símbolos:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Si identificamos un trinomio cuadrado perfecto, podemos indicarlo como el cuadrado de la suma (o resta) de sus bases.

Por ejemplo, la expresión:

✓ $4 + 4z + z^2 = (2 + z)$ → **Es un trinomio cuadrado perfecto, porque tenemos dos términos elevados al cuadrado: 2 y z y un tercer término que es el doble producto de los otros dos: $2 \,.\, 2 \,.\, z = 4z$.**

Sin embargo:

$9 + 2y + y^2 =$ **NO** es un trinomio cuadrado perfecto

Porque a pesar de que tiene tres términos y existen dos términos que aparecen elevados al cuadrado (3 e "y"), no aparece el doble producto del primero por el segundo: $2 \,.\, 3 \,.\, y = 6y$.

Actividad 11

Factoriza las siguientes expresiones.

a) $x^2 - 2x + 1 =$

b) $4x^2 + 16x + 16 =$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

En símbolos:

$$x^2 - a^2 = (x + a).(x - a)$$

La diferencia (¡atención!, **NO** la suma) de dos términos cuadrados pueden expresarse como el producto de la suma por la diferencia de sus bases.

Por ejemplo:

✓ $$16 - x^2 = (4 + x).(4 - x)$$

Actividad 12

Decir si es Verdadero (V) o Falso (F):

a) $(a - b)^2 = (a - b).(a + b)$	
b) $(a - b)^2 = (a - b).(a - b)$	
c) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
d) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$	
e) $a^2 - b^2 = (a - b).(a - b)$	
f) $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$	
g) $(-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1$	
h) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$	
i) $4x^2 + 16x + 16 = (2x + 4)^2$	
j) $-x^2 + b^2 = (-x + b).(x + b)$	

Actividad 13

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4x^5 - 4x =$

b) $9y + 24y^2 + 16y^3 =$

c) $24x^2 + 6x^3 - 4x - 16 =$

d) $16x^3 + 9x + 24x^2 =$

e) $9x^6 - 9x^2 =$

A continuación, te proponemos una Actividad Integradora de estos **Productos Notables**.

Actividad 14

Desarrolla o factoriza, según corresponda, cada una de las siguientes expresiones:

a) $(3-2x)^2 =$

b) $4x^2 - 36 =$

c) $2x^2 + 8x + 8 =$

d) $16x^4 - 16x^2 =$

e) $2x^3 - 16x^2 + 32x - 64 - 4x^2 + 32x =$

f) $(2x+3y)^2 =$

Hemos analizado la suma y el producto de expresiones algebraicas, pero puede suceder que debamos considerar expresiones tales como:

$$\frac{8}{x-1} \quad ; \quad \frac{2+3x}{6x}$$

en donde la variable aparece en el denominador

Estas expresiones se denominan: **EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS**, e implican cocientes:

2.1.2. Expresiones algebraicas fraccionarias

Las expresiones algebraicas fraccionarias son cocientes de polinomios.
En símbolos: Expresiones Algebraicas Fraccionarias tienen la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son **POLINOMIOS**.

Ejemplos de expresiones algebraicas FRACCIONARIAS:

- ✓ $\frac{3x^3+2x^2-3x+1}{3x^2+2x-3}$
- ✓ $\frac{2x^4-8}{x-2}$

2.1.2.1. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Las reglas que guían las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias son las mismas reglas de las fracciones, también nombradas en este material.

Veamos algunos ejemplos en los que debamos resolver expresiones algebraicas fraccionarias:

1° se saca factor común en el numerador del primer factor y en el denominador del segundo factor

$$\frac{3x+9}{6}\cdot\frac{18}{5x+15}=\frac{3.\cancel{(x+3)}}{\cancel{6}_{1}}\cdot\frac{\cancel{18}^{3}}{5.\cancel{(x+3)}}=\frac{3\,.\,3}{5}=\frac{9}{5}$$

2° se simplifican los factores del numerador con los del denominador, o sea, $(x+3)$ con $(x+3)$ y el 18 con el 6; luego se multiplica derecho.

Veamos otro ejemplo resuelto:

Se resolvió la suma del numerador.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{(x-1)+1}{x^2-1}=\frac{x}{x^2-1}$$

Se buscó un común denominador para los dos sumandos, recuerda que $x^2-1=(x-1).(x+1)$

Seguidamente te proponemos algunas actividades que incluyen operaciones con expresiones algebraicas racionales, junto a casos de factoreo, para reafirmar los temas repasados.

¡ATENCIÓN! No existe una regla que sea aplicable en cada caso. Dependerá mucho de tu ingenio reconocer qué regla de factorización o qué producto notable conviene aplicar en el caso específico de manera de simplificar la expresión y arribar al resultado.

ADVIERTE que en el resultado no se pudo simplificar las x del numerador y denominador ya que la x^2 está afectada por la resta del 1, no por el producto.

¡A PRACTICAR ¡

Actividad 15

Factoriza, resuelve y simplifica, según corresponda:

a) $\frac{x^2+8x+16}{x+4} =$

b) $\frac{x^3+4x^2-16x-64}{x+4} =$

c) $\frac{4x^5-4x}{9x^6-9x^2} =$

d) $\frac{x^2-1}{x^3+2x^2-x-2} =$

e) $\frac{24x^2+6x^3-4x-16}{3x^3+12x^2-2x-8} =$

f) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} =$

g) $\frac{(x-1).(x+2)}{x-7} - \frac{x^2-4}{x-7} + \frac{-4x+8}{(x-7).(x-2)} =$

h) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{-x+1}{x^2-2x+1} =$

i) $\frac{(y^2-9)}{(y-1)} . \frac{(y-3)}{(y+3)} =$

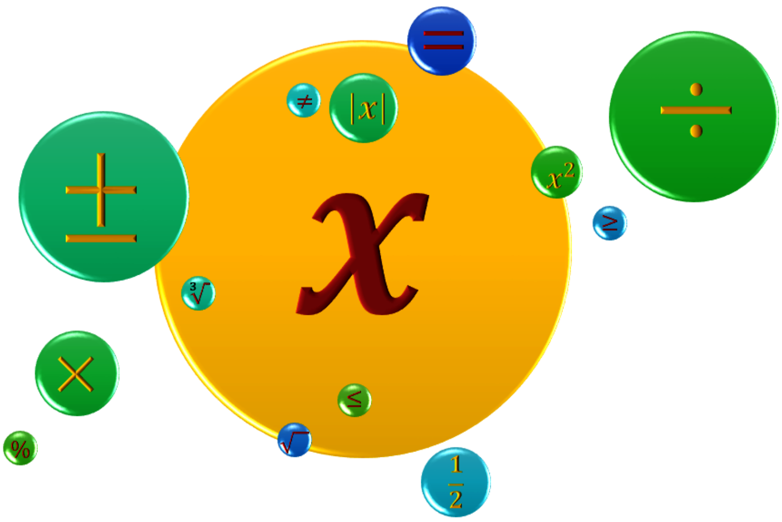
j) $\frac{x^2-4}{x^2+2x} . \frac{x^2}{x-2} =$

k) $\frac{2x+x^2}{x} : \frac{x^2}{2-x} =$

l) $\frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+8x}{x-1}} =$

III Ecuaciones

Las representaciones son las figuras o ideas que sustituyen a la realidad y que nos permiten comunicarnos. Así, cuando en una empresa, queremos establecer la relación entre los costos variables y los fijos, hacemos una representación de tales costos, y para ello nos valemos del concepto matemático de ecuaciones. Pues, representar tales costos, se reduce a encontrar uno o algunos números que cumplan con ciertas condiciones, susceptibles de ser expresados por medio de igualdades y que representen tales costos. Estas igualdades, que satisfacen los costos desconocidos, se llaman ecuaciones.



En este módulo trabajaremos con ecuaciones lineales, cuadráticas, ecuaciones con módulo, también con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y con inecuaciones.

Objetivos:

- ✓ Resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.
- ✓ Resolver ecuaciones e inecuaciones lineales y representar el conjunto solución en la recta numérica.
- ✓ Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por distintos métodos.

Para lograrlos te proponemos repasar los siguientes:

Contenidos:

3.1. Ecuaciones con una incógnita

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se transforma en igualdad numérica cuando se atribuyen a las letras que figuran en la igualdad algebraica valores numéricos particulares.

Resolver una ecuación es encontrar los valores de sus variables para los cuales la ecuación se verifica.

Los valores particulares que asumen las letras para que una ecuación se convierta en una igualdad numérica son las raíces de la ecuación.

¿Adviertes la diferencia que existe entre una identidad y una ecuación?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3.1.1. Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación lineal con una incógnita es aquella igualdad que posee la incógnita elevada al exponente 1.

Por ejemplo: $5\,x + 2 \; = -3$, es una ecuación lineal, porque la incógnita, x, está elevada al exponente 1.

La solución es: x =−1 porque 5. (−1) + 2 = −3

Veamos el siguiente ejemplo resuelto, que nos permite hallar la raíz o solución de la ecuación:

$$2-\left[-2(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Dentro del corchete, aplicamos propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Suprimimos paréntesis, teniendo en cuenta que está precedido por un signo menos.

$$2+2x+2+\frac{x-3}{2}=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Sacamos común denominador y resolvemos

$$24 + 24x + 24 + 6(x-3) = 8x - (5x-3) + 36x$$

Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

En el segundo miembro quitamos el paréntesis que, al estar precedido por el signo menos, cambian los signos que figuran dentro de él

$$24x + 6x - 8x + 5x - 36x = 3 - 24 - 24 + 18$$

Agrupamos términos y sumamos términos semejantes.

$$-9x = -27$$

Dividimos los dos miembros por: -9

$$x = 3$$

Veamos cómo resolvemos otra ecuación un poco más complicada, en la que aplicaremos **productos notables** y **factorización**.

$$(x-6)^2 - 13 = 5(x+3)(x-3) + 2x(-\frac{1}{3} - 2x)$$

Separamos en términos cada miembro. Hay que recordar que los signos más y menos fuera de un paréntesis separan términos

$$\underbrace{(x-6)^2}_{Cuadrado\ de\ una\ resta} - 13 = \underbrace{5(x+3)(x-3)}_{Factoreo\ de\ una\ diferencia\ de\ cuadrados} \underbrace{+ 2x(-\frac{1}{3} - 2x)}_{Propiedad\ distributiva}$$

Desarrollamos, según corresponda, luego operamos y distribuimos el 5.

$$x^2 - 12x + 36 - 13 = 5(x^2 - 9) - \frac{2}{3}x - 4x^2$$

$$x^2 - 12x + 23 = 5x^2 - 45 - \frac{2}{3}x - 4x^2$$

Restamos los términos semejantes en el 2º miembro.

$$\cancel{x^2} - 12x + 23 = \cancel{x^2} - 45 - \frac{2}{3}x$$

$$-12x + 23 = -45 - \frac{2}{3}x$$

Agrupamos términos semejantes

$$-12x + \frac{2}{3}x = -45 - 23$$

$$x\left(-12 + \frac{2}{3}\right) = -68$$

Sacamos factor común x en el primer miembro y operamos en el segundo

$$-\frac{34}{3}x = -68$$

Operamos en el paréntesis

$$-34x = -68 \,.\, 3$$

El 3 que está dividiendo al primer miembro pasa multiplicando a todo el otro miembro

$$x = \frac{-204}{-34}$$

Pasamos dividiendo -34 al segundo miembro

$$\boxed{x = 6}$$

Calculamos y obtenemos el valor de la incógnita

Para verificar, sustituimos la incógnita de la ecuación original por el valor que obtuvimos:

$$(6-6)^2 - 13 = 5(6+3)(6-3) + 2 \,.\, 6(-\frac{1}{3} - 2 \,.\, 6)$$

La solución es correcta porque la igualdad se cumple:

$$0 - 13 = 5.9.3 + 12(-\frac{1}{3} - 12)$$

$$-13 = 135 + 12(-\frac{37}{3})$$

$$-13 = -13$$

PRACTICA CON LAS SIGUIENTES ECUACIONES

Actividad 16

Resuelve las siguientes ecuaciones y verifica las soluciones:

a) $(x+2)(x-2) + \frac{5}{3}x\left(\frac{9}{10}x - 1\right) = \frac{5}{2}(x-3)^2 + \frac{27}{2}$

b) $-4\left(2x - \frac{1}{4}\right) + (x+4)^2 = 2(7+x)(7-x) + 3x + 3x^2$

c) $(x-5)^2 - (1+x)(x-1) = 2(5x+3)$

d) $(x-6)^2 - (x+8)^2 = 28(x+1)$

Actividad 17

Te proponemos nos ayudes a detectar el error que se cometió en la resolución de las siguientes ecuaciones.

a)

$$-x + (x+1)(x-1) = \frac{1}{2}(2x+20) + x(1+x) - 1$$
$$-x + x^2 - 1 = x + 10 + x + x^2 - 1$$
$$-3x = 10$$
$$x = 10 + 3$$
$$x = 13$$

b)

$$-3(x+1) - 2 = 2(x-7) + 2x$$
$$-3x - 3 = 2x - 14 + 4x$$
$$-3x - 3 = 6x - 14$$
$$-3x - 6x = -14 + 3$$
$$-9x = -11$$
$$x = \frac{11}{9}$$

En Ciencias Económicas, usaremos las ecuaciones para resolver situaciones problemáticas que se plantearan en forma coloquial. Para poder resolverlas y aplicar el herramental matemático adecuado necesitaremos traducir ese lenguaje coloquial al simbólico.

3.1.2 Del Lenguaje Coloquial al Matemático

El lenguaje matemático es un código tal como lo es el lenguaje coloquial (con el que hablas todos los días). En matemática, no sólo podemos utilizar una letra como número generalizado sino también tenemos la posibilidad de representar con letras tanto incógnitas, como a variables y constantes. La complicación se presenta cuando debemos pasar a lenguaje matemático una estructura de relaciones vinculadas con cierta complejidad entre los datos conocidos y lo que se quiere averiguar.

Para facilitarte la resolución de los distintos problemas propuestos en este módulo, te sugerimos, que frente a cada uno trata de ayudarte con algunas preguntas, tales como:

- ✓ ¿Qué es lo que se quiere averiguar?, o expresado formalmente: ¿Cuál es la incógnita?
- ✓ ¿Cuáles son los datos disponibles?
- ✓ ¿Qué relación vincula los datos con las incógnitas?
- ✓ ¿Qué está permitido hacer?, en otras palabras: ¿Qué propiedades conocemos y que pueden utilizarse para resolver eficazmente la situación planteada?
- ✓ ¿El conjunto solución hallado, da respuesta al problema planteado?

Encontrar la solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación sobre la base de los datos de un problema suele ser más complejo.

Seguidamente te sugerimos algunas pautas que te ayudarán a resolver un problema.

ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Etapa 1: **PLANTEO** del problema en lenguaje Matemático.

Elegir las variables cuya determinación es suficiente para responder a la situación planteada y traducir en ecuaciones las condiciones impuestas al o los valores buscados.

Etapa 2: **RESOLUCIÓN** de la o las Ecuaciones.

Calcular los valores que satisfacen las ecuaciones. En otras palabras, despejar la /s incógnita /s de las ecuaciones planteadas.

Etapa 3: **INTERPRETACIÓN** de la Solución.

Discutir si las soluciones halladas satisfacen el modelo, es decir, si los valores hallados son compatibles con el problema enunciado.

Trabajaremos con el siguiente ejemplo:

Un comerciante disponía de una cierta cantidad de dólares. El primer año gastó 100 dólares. Luego, incrementó el dinero restante en un tercio. El año siguiente gastó nuevamente 100 dólares. Posteriormente, agregó el triple del dinero que le quedaba, con lo que obtuvo el doble de su capital inicial. ¿Podrías averiguar de cuánto dinero disponía en un principio?

La traducción corresponde a la primera etapa de la resolución de problemas, es decir al **PLANTEO** del problema. Nos ayudaremos con las siguientes preguntas:

¿Qué es lo que se quiere averiguar?

Determinar cuál fue el capital inicial del comerciante

Representa la incógnita

¿Cómo la representamos en el lenguaje matemático?

Con la letra inicial de la incógnita

$c = Capital\ Inicial$, medido en dólares

¿Cuáles son los datos disponibles?

¿Qué relación vincula los datos con la incógnita?

El primer año se gastó 100 dólares

A la cantidad desconocida c, se la disminuyó en 100 dólares.

Lenguaje Matemático

$c - 100$

Incrementó el dinero restante en un tercio.

Al dinero restante $c - 100$, se lo debe multiplicar por un tercio. Dicha cantidad debe sumarse a la obtenida anteriormente.

Lenguaje Matemático

$$(c - 100) + \frac{1}{3} \cdot (c - 100)$$

El año siguiente gastó nuevamente 100 dólares.

A la expresión anterior, se le debe restar 100.

Lenguaje Matemático

$$(c - 100) + \frac{1}{3} \cdot (c - 100) - 100$$

Antes de continuar, te recomendamos realizar algunos cálculos con la finalidad de trabajar con expresiones más reducidas:

$$(c - 100) + \frac{1}{3} \cdot (c - 100) - 100 = \frac{3 \cdot (c - 100) + (c - 100) - 3 \cdot 100}{3} =$$

$$= \frac{3c - 300 + c - 100 - 300}{3} = \frac{4c - 700}{3}$$

Posteriormente, agregó el triple del dinero que le quedaba ...

Lenguaje Matemático

$$\frac{4c - 700}{3} + 3 \cdot \left(\frac{4c - 700}{3}\right) = \frac{16c - 2800}{3}$$

Finalmente...

El capital llegó al doble del inicial.

Lenguaje Matemático

$$\frac{16c - 2800}{3} = 2c$$

De esta forma se ha ido condicionando la incógnita hasta tener planteada la ecuación completa. Ahora, estamos en condiciones de determinar el capital inicial del comerciante, y para ello se debe resolver la ecuación anterior que, si observas, se trata de una ecuación lineal.

Teniendo en cuenta las etapas en la resolución de un problema, te proponemos resuelvas la siguiente situación problemática:

Actividad 18

Resuelve la siguiente situación problemática, planteando la ecuación correspondiente. No olvides verificar e interpretar la solución.

Mi esposa gastó en la Farmacia $\frac{1}{3}$ del dinero que tenía y luego, en la carnicería $\frac{2}{5}$ de lo que le quedó; aún tiene \$60. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

Las ecuaciones que resolvimos son ecuaciones de 1° grado, porque la incógnita aparece elevada al exponente 1. También en esta ocasión revisaremos los procedimientos para resolver ecuaciones de 2° grado.

3.1.3. Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es una igualdad en donde la incógnita aparece elevada al cuadrado.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 2x = 0$, es una ecuación cuadrática, porque la incógnita "x" aparece elevada al cuadrado.

Resolvamos paso a paso la ecuación:

$$\boldsymbol{x^2 + 2x = 0}$$

$$x\,.(x + 2) = 0$$

Sacamos factor común x en el primer miembro y nos queda un producto de dos factores

$$x = 0 \;\; ó \;\; (x+2) = 0$$

$$x = 0 \;\; ó \;\; x = -2$$

Para que el resultado de dicho producto se anule existen dos alternativas: $x = 0$ ó $(x+2) = 0$, por lo que $x = -2$

Y esas son las dos soluciones de la ecuación de segundo grado, ya que, si reemplazamos dichos valores en la ecuación, se verifica la igualdad.

Veamos otro ejemplo:

✓ $2x^2 - 2x - 4 = 0 \longrightarrow$ En este caso no podemos proceder como en el caso anterior que sacamos factor común x, ya que existe un término que no lo tiene.

Para estos casos y en general para resolver cualquier ecuación cuadrática, existe una fórmula general, que seguramente la recordarás por haberla aplicado muchas veces en la resolución de distintas actividades:

FÓRMULA CUADRÁTICA

(también denominada Fórmula Resolvente)

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ (es a distinto de cero), están dadas por:

$$\boxed{x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

¿La recuerdas?

De la aplicación de dicha fórmula pueden surgir, dos raíces reales distintas, dos raíces reales iguales o dos raíces imaginarias según el signo que asuma la expresión que está debajo de la raíz cuadrada.

- ✓ Si $b^2 - 4ac > 0$ obtendremos dos raíces reales distintas.
- ✓ Si $b^2 - 4ac = 0$ obtendremos dos raíces reales iguales.
- ✓ Si $b^2 - 4ac < 0$ obtendremos dos raíces imaginarias.

Este caso no lo desarrollaremos porque ya dijimos que trabajaremos con el conjunto de números reales.

Retomando nuestro ejemplo, si debemos resolver la ecuación:

✓ $2x^2 - 2x - 4 = 0$

Aplicando la fórmula cuadrática:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\,.\,2\,.\,(-4)}}{2\,.\,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-(-32)}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+6}{4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{2-6}{4} = -1 \end{cases}$$

Rta: Las soluciones de $2x^2 - 2x - 4 = 0$ son: $x = 2$ y $x = -1$

Veamos otro ejemplo resuelto:

$$x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$$

Se multiplicó miembro a miembro por 6

$$6x^2 - 7x + 2 = 0$$

Hallemos las raíces, utilizando la fórmula resolvente:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.6.2}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Actividad 19

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-6).(x+2) = 0$

b) $x^2 + 3x = 10$

c) $2x^2 + 9x = 5$

d) $4x^2 = 9x$

e) $x^2 - 2x = 2$

f) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Actividad 20

Una compañía de TV por cable que tiene 20000 abonados y cobra $35 mensuales, ordena un estudio de mercado para decidir el aumento que aplicará en sus tarifas. Los resultados del estudio indican que la empresa perderá 400 abonados por cada peso que aumente la tarifa. ¿Cuál deberá ser el aumento para que no haya ingreso? ¿Y para que el ingreso sea de $92500?

Tarifa $	Cantidad de Abonados	Ingreso ($)
35	20000	$35\,.\,20000$
$35 + 1$	$20000 - 400\,.\,1$	$(35+1)\,.\,(20000 - 400\,.1)$
$35 + 2$	$20000 - 400\,.\,2$	$(35+2)\,.\,(20000 - 400\,.2)$
$35 + 3$	$20000 - 400\,.\,3$	$(35+3)\,.\,(20000 - 400\,.3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$35 + x$	$20000 - 400\,.\,x$	…

La fórmula que escribimos para una tarifa de $35 + x$ permite calcular el ingreso de la compañía en función del incremento aplicado en la tarifa. ¿Qué valores debe tener x, para que sea solución del problema?

Actividad 21

En una fábrica se incorporó una máquina de última generación, antes del 20 de diciembre de 2014, la misma aumentará las ganancias de la empresa. Sin embargo, está previsto que en cierto momento dichas ganancias comenzarán a disminuir por el deterioro de la máquina y los gastos de mantenimiento. Se estima que la situación puede preverse según el siguiente modelo:

$$G(x) = -1{,}25\, x^2 + 2{,}5\, x + 18{,}75$$

donde x es el tiempo transcurrido desde la compra de la máquina medido en años, y G es la ganancia adicional, resultado de su utilización, medida en miles de dólares. Si no tiene ganancia adicional, ¿cuál es el tiempo transcurrido?

3.1.4. Ecuaciones con Módulo

Puede suceder que debamos resolver una ecuación en la que aparece un valor absoluto.

Se llama **MÓDULO** ó también **VALOR ABSOLUTO** de un número real a la distancia entre dicho número y cero y lo simbolizamos: $|x|$

Por ejemplo: los números 4 y -4 son opuestos ya que tienen distinto signo, pero tienen igual módulo, porque están a la misma distancia de cero.

Es decir que: $|-4| = |4| = 4$

Gráficamente:

Generalizando:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}}$$

Es importante tener en claro que $-x$ es positivo cuando x es negativo.

Aplicaremos la definición de módulo para resolver las ecuaciones con módulo.

Resolvamos la ecuación:

✓ $|x-2|=3$

Esta ecuación expresa que $x-2$ es un número que se encuentra a tres unidades de cero.

Por ello podemos decir que:

$$x-2=3 \quad \Longrightarrow \quad x=3+2=5$$

ó bien:

$$x-2=-3 \quad \Longrightarrow \quad x=-3+2=-1$$

De ambas igualdades surgen las soluciones de la ecuación con módulo, que reemplazadas en la misma verifican la igualdad:

Para $x=-1$:

$$|-1-2|=3 \Longrightarrow |-3|=3$$

Para $x=5$:

$$|5-2|=3 \Longrightarrow |3|=3$$

En general se puede interpretar $|a-b|$ ó $|b-a|$ como la distancia entre a y b.

Por ello en la ecuación anterior $|x-2|=3$ establece que la distancia entre x y 2 es de tres unidades, por lo que las soluciones:

$x=-1$ y $x=5$ indican los números que distan de 2 en tres unidades. **Compruébalo en la recta numérica**.

La raíz cuadrada de x^2 se expresa como el módulo de x.

En símbolos, escribimos:

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

Esta expresión del módulo de un número nos resultará útil cuando en una ecuación sea necesario despejar una incógnita que esté elevada a una potencia par.

Por ejemplo, si resolvemos la ecuación:

✓ $x^2-6=19$

Despejamos x^2

$x^2=19+6$

Aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad

$\sqrt{x^2}=\sqrt{25}$

Sustituimos el primer miembro utilizando el módulo y calculamos $|x|=5$

$|x|=5$

$$\boxed{x=\pm 5}$$

Ahora reemplacemos cada uno de los valores en la ecuación original para comprobar si se cumple la igualdad:

Para $x=5$	=	**Para $x=-5$**
$5^2-6=19$		$(-5)^2-6=19$

Actividad 22

Halla el/los valores de x que verifica la igualdad

a) $|x+2|=1$ **b)** $(3+x)^2-4=0$

c) $|2x+4|=0$ **d)** $x^2-8=1$

¿Qué sucede si aparece una desigualdad en vez de una igualdad?

La expresión se denomina inecuación y el procedimiento de resolución es muy similar al utilizado en las ecuaciones.

3.1.5. Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad en la que hay dos miembros relacionados mediante cualquiera de estos signos $\leq$, $<$, $\geq$, $>$. Si esos miembros son expresiones algebraicas, estamos en presencia de una inecuación, en la cual figuran números e incógnitas. Por ejemplo:

✓ $x+2>1$ implica que $x>1-2$ por lo que $x>-1$

La única propiedad que cambia con respecto a las igualdades es cuando el número que **multiplica** o **divide** a la incógnita es un **número negativo**, al despejarlo, invierte el sentido de la desigualdad.

Por ejemplo:

$$-\frac{1}{4}-2x\leq\frac{7}{4}$$

$$-2x\leq\frac{7}{4}+\frac{1}{4}$$

$$-2x\leq\frac{8}{4}$$

$$x\geq\frac{2}{-2}$$

$$x\geq-1$$

En este caso, al dividir miembro a miembro de la desigualdad por el valor, (-2), se invierte el sentido de esta.

Al trabajar con módulo también pueden aparecer expresiones que contengan los signos $\leq$, $<$, $\geq$, $>$.

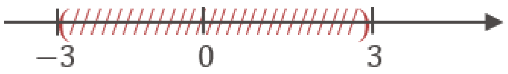
Veamos algunos ejemplos:

Hallemos los valores de x que verifican la desigualdad:

✓ $|x| < 3$

Debemos hallar todos los valores de x cuya distancia a cero sea menor que 3.

Gráficamente la situación sería:



Los valores de x que estamos buscando pertenecen al intervalo $(-3;\ 3)$, es decir: $-3 < x < 3$.

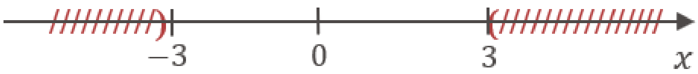
En símbolos: $|x| < 3 \Longrightarrow -3 < x < 3$ sería el conjunto solución de la inecuación.

Observa ahora como hallamos los valores de x que verifiquen la desigualdad:

✓ $|x| > 3$

Debemos hallar todos los valores de x cuya distancia a cero sea mayor que 3.

Gráficamente la situación sería:



Los valores de x que estamos buscando pertenecen al intervalo $(-\infty; -3)$ o al intervalo $(3\ ;\ \infty)$, es decir $x > 3$ o $x < -3$.

En símbolos: $|x| > 3 \Longrightarrow x > 3$ o $x < -3$

Analicemos ahora el siguiente ejemplo:

✓ $|x - 2| > 3$

Gráficamente la situación sería:

Los valores de x que estamos buscando pertenecen al intervalo $(-\infty; -1)$ o al intervalo $(5\ ;\ \infty)$, es decir $x > 5$ o $x < -1$.

En símbolos: $|x - 2| > 3 \Longrightarrow x > 5$ o $x < -1$.

Actividad 23

Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, graficando en la recta real cada uno de los conjunto solución.

a) $2x + 5 < 11$

b) $5 + 3x > 4$

c) $6 - 3x \leq -3$

d) $|x - 2| < 3$

e) $|x + 1| \geq 4$

f) $|x + 2| \geq 2$

Hemos repasado los procedimientos por los cuales se resuelven las ecuaciones con una incógnita, veremos ahora cómo se resuelven las ecuaciones en las cuales aparecen dos incógnitas o variables.

3.2. Ecuaciones con dos incógnitas

Ya vimos que una ecuación es una igualdad en la que debemos averiguar el valor de una incógnita.

Cuando en la ecuación aparecen dos letras representando variables o incógnitas a averiguar el procedimiento cambia.

La expresión: $\boldsymbol{x + y = 3}$ es un ejemplo de una ecuación de dos variables, y para resolverla debemos averiguar los valores de "$\boldsymbol{x}$" e "$\boldsymbol{y}$" que verifican la igualdad.

Dentro de las soluciones podemos intuir que estarán:

$$\boldsymbol{x = 2 \quad , \quad y = 1}$$

También: $\boldsymbol{x = -1 \quad , \quad y = 4}$

También: $\boldsymbol{x = 0 \quad , \quad y = 3}$ etc. etc.

Todos esos pares de valores simultáneamente verifican la ecuación, ya que sumados dan por resultado $\boldsymbol{3}$.

Pero además de esos pares de valores existen otros infinitos pares que verifican la ecuación, por lo que podemos decir que existen infinitas soluciones para este tipo de ecuaciones.

Cada una de ellas puede ser interpretada como un punto de coordenadas (x, y) sobre una recta, ya que la ecuación $x + y = 3$ es la ecuación de una recta.

RECUERDA

Para encontrar los pares de valores que pertenecen a una recta y que verifican su ecuación se despeja una de las variables, en nuestro ejemplo:

$$\boldsymbol{y = -x + 3}$$

Luego se le da valores arbitrarios a "x" y se obtienen los correspondientes valores de "y".

Las ecuaciones donde las incógnitas aparecen todas con grado 1, que no están elevadas a ninguna otra potencia, ni bajo ninguna raíz, se llaman ecuaciones lineales.

Si en vez de tener que averiguar los valores que asumen las variables que verifican una ecuación lineal de dos variables, tenemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cada una y debemos encontrar los valores que verifican ambas ecuaciones simultáneamente.

3.2.1. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas representa un conjunto de dos rectas, y su resolución consiste en hallar un punto en común entre ellas, es decir encontrar un valor de cada incógnita que verifique el sistema.

Para hallar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se pueden aplicar distintos métodos.

En este repaso recordaremos los procedimientos de tres de ellos: Método de igualación, Método por sustitución y Método gráfico.

Por ejemplo:

Teniendo el siguiente sistema lineales con dos incógnitas, nuestro objetivo será hallar los valores de "x" y de "y" tal que las dos ecuaciones sean verdaderas.

✓ $\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$ Para ello, utilicemos el siguiente método:

Método de Igualación

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Despejamos una de las dos variables en las dos ecuaciones, con lo cual tenemos un sistema equivalente.
En este caso elegimos despejar la variable "y" en ambas ecuaciones

$$\begin{cases} y = \dfrac{22 - 4x}{3} \\ y = \dfrac{18 - 2x}{5} \end{cases}$$

Recordamos que, al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, por lo que podemos igualar los segundos miembros.

$$\frac{22 - 4x}{3} = \frac{18 - 2x}{5}$$

$$5.(22 - 4x) = 3.(18 - 2x)$$

Luego, estamos en presencia de una ecuación de 1° grado con una variable que resolvemos despejando el valor de esa única variable.

$$110 - 20x = 54 - 6x$$

$$-20x + 6x = 54 - 110$$

$$-14x = -56$$

$$x = \frac{-56}{-14}$$

$$x = 4$$

Reemplazamos el valor de x obtenido, en alguna de las ecuaciones

En nuestro ejemplo, elegimos reemplazar el valor de $x = 4$ en la segunda ecuación.

$$y = \frac{18 - 2.(4)}{5} = \frac{18 - 8}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Operamos para hallar el valor de y

La **solución** del sistema es el par de valores $(x\,;\,y) = (4\,;\,2)$

VERIFICACIÓN

Para comprobarlo reemplazamos en ambas ecuaciones el valor hallado:

$$\begin{aligned} 4.(4) + 3.(2) &= 22 \\ 16 + 6 &= 22 \\ 22 &= 22 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2.(4) + 5.(2) &= 18 \\ 8 + 10 &= 18 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

Ahora sí, podemos asegurar que el par $(4\,;\,2)$ es la única solución del sistema planteado.

Veamos cuál es el procedimiento si se resuelve el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por otro método:

Método de Sustitución

Resolveremos por este método el mismo sistema que ya resolvimos por el método de igualación.

En nuestro ejemplo elegimos despejar la variable "y" en la primera ecuación

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \longrightarrow y = \dfrac{22 - 4x}{3} \\ 2x + 5y = 18 \longrightarrow 2x + 5.\left(\dfrac{22 - 4x}{3}\right) = 18 \end{cases}$$

Despejamos una de las variables en una de las ecuaciones.

Luego reemplazamos el valor hallado en la otra ecuación.

Nuevamente nos ha quedado planteada una ecuación de 1° grado con una incógnita que sabemos resolver

$$2x + \frac{110 - 20x}{3} = 18$$

$$2x - \frac{20x}{3} = 18 - \frac{110}{3}$$

$$-\frac{14x}{3} = -\frac{56}{3}$$

$$\boxed{x = 4}$$

Luego reemplazamos el valor de x obtenido, en alguna de las ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita y.

En nuestro ejemplo lo reemplazamos en la primera ecuación:

$$4.(4) + 3y = 22$$
$$16 + 3y = 22$$
$$3y = 22 - 16$$
$$3y = 6$$
$$y = \frac{6}{3}$$
$$\boxed{y = 2}$$

Confirmamos que la solución del sistema está dada por el par $(4; 2)$. No hace falta verificarlo, ya que se hizo al aplicar el método de igualación.

También es posible hallar la solución de un sistema a través del Método gráfico.

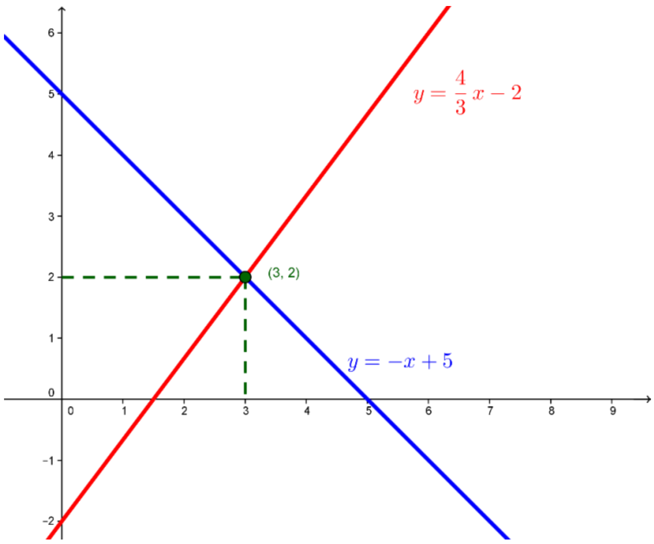
Método Gráfico

Consideramos como ejemplo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3y + 6 = 4x \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Para graficar las rectas que representan cada una de las ecuaciones de 1° grado con dos incógnitas, despejamos “y” en cada ecuación y obtenemos así las fórmulas de las dos funciones lineales.

En la primera $y = \frac{4}{3}x - 2$ En la segunda $y = -x + 5$



RECUERDA: para representar cada recta, podemos utilizar su pendiente y su ordenada al origen.
El número que multiplica a “x” en la ecuación es la pendiente, determina su inclinación, y el término independiente es la ordenada al origen, es decir, el punto en el que la recta corta al eje y.

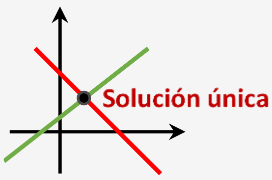
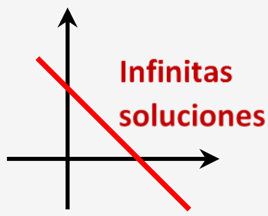
La solución del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya representación en el plano son dos rectas, está dada por el punto $(3, 2)$ que pertenece a ambas rectas.

Es decir que el par $(3, 2)$ verifica simultáneamente ambas ecuaciones del sistema.

¿Te animas a verificar gráficamente la solución del sistema resuelto por igualación y sustitución?

CLASIFICACIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Cuando resolvemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, podemos encontrarnos ante tres casos:

Qué sucede en el gráfico		Clase de sistema
Las rectas se cortan en un punto, es decir que tienen pendientes distintas.		**Compatible Determinado**
Las dos ecuaciones representan la misma recta, es decir que tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen.		**Compatible Indeterminado**
Las rectas son paralelas, es decir que tienen igual pendiente y distinta ordenada al origen.		**Incompatible**

Te proponemos el siguiente desafío:

- Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas.
- Obtén una nueva ecuación multiplicando la anterior por un mismo número en ambos miembros.
- Forma un sistema con las dos ecuaciones anteriores

  ¿A cuál de los tres casos mencionados, corresponderá el sistema obtenido?

Actividad 24

Resuelve los siguientes sistemas, grafícalos en un sistema de ejes coordenados y luego clasifícalos:

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ y - x = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3 + y \\ 3y = -9 + 3x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ y - 1 = -x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

¿Pudiste identificar algún sistema que responda al desafío planteado?

Existen numerosos problemas cuya resolución consiste en plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

A continuación, te planteamos el siguiente problema:

Un inversionista posee “x” Euros e “y” Dólares. Sabe que al final del mes pasado el valor total de su dinero había bajado $\$350{,}00$ producto de una disminución conjunta de un $\$1$ en la cotización del Euro y $\$2$ en la cotización del Dólar. Ayer el valor total ha aumentado $\$\ 600{,}00$; consultando las cotizaciones el Euro subió $\$3{,}00$ y el Dólar $\$1{,}00$. Con los datos disponibles, ¿es posible saber cuántos Euros y Dólares posee el inversor?

¿Qué es lo que se quiere averiguar?

Determinar la cantidad de Euros y Dólares que posee el inversor.

Representan las incógnitas

¿Cómo la representamos en el lenguaje matemático?

Con la letra x representaremos a la cantidad de Euros y con y la cantidad de Dólares.

$$x = \text{ Cantidad de Euros } ; y = \text{ Cantidad De Dólares}$$

¿Cuáles son los datos disponibles?

¿Qué relación vincula los datos con las incógnitas?

Sabe que al final del mes pasado el valor total de su dinero había bajado $\$350{,}00$ producto de una disminución conjunta de un $\$1{,}00$ en la cotización del Euro y $2 en la cotización del Dólar.

Los Euros y Dólares se valúan, en una fecha determinada, a su valor de cotización. En este caso el enunciado no nos brinda la cotización, pero nos dice que en ambas monedas la misma ha disminuido un $1. Es por ello, que:

$$\text{Disminución en la Cotización del Euro x Cantidad de Euros}$$
$$+$$
$$\text{Disminución en la Cotización del Dólar x Cantidad de Dólares}$$
$$=$$
$$\text{La cantidad de dinero que ha perdido}$$

Lenguaje Matemático

$$-x - 2.y = -350$$

Hemos llegado a obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Lenguaje Matemático

$$\begin{cases} -x - 2y = -350 \\ 3x + y = 600 \end{cases}$$

Ahora que ya tienes armado el sistema, te invitamos a que averigües cuántos Euros y Dólares posee el inversor, utilizando alguno de los métodos dados para su resolución.

Con estas actividades damos por concluido el temario dispuesto para el repaso. Esperamos que la revisión de estos temas te haya permitido actualizarlos de manera de poder recordarlos cuando debamos recurrir a ellos.

.

CAPÍTULO Nº1:

NÚMEROS REALES Y FUNCIONES

Objetivos:

Al finalizar este primer capítulo deberás ser capaz de:

- ✓ Revisar la estructura del campo numérico real y su representación en la recta numérica.
- ✓ Observar el uso de los números reales en aplicaciones de la vida cotidiana.
- ✓ Distinguir una función en sus distintas formas de representación: mediante una expresión algebraica, una gráfica, una expresión coloquial y una tabla de valores.
- ✓ Clasificar los distintos tipos de funciones.
- ✓ Interpretar el comportamiento de las funciones en modelos económicos.

Contenidos:

1. Números Reales y Funciones

En este capítulo abordaremos el concepto de **números reales** y de las **relaciones funcionales** que surgen entre variables. Su estudio se formalizará a partir de las distintas representaciones: algebraicas, gráficas, expresiones coloquiales y tabla de valores.

A partir de situaciones sencillas que se presentan en la vida diaria, se comenzará reconociendo que existen variables que muestran alguna relación de dependencia. El estudio se centrará principalmente en el concepto de **función**, que constituye el pilar fundamental del análisis matemático. Conocer los distintos tipos de funciones permite la **modelización matemática** de situaciones relacionadas con las Ciencias Económicas.

De las funciones, se analizará el dominio e imagen, el comportamiento gráfico, identificando puntos notables, intervalos de crecimiento o decrecimiento, intervalos en los cuales asumen valores positivos, negativos o nulos y valores extremos.

Para abordar satisfactoriamente estos conceptos se deberán tener presentes los conocimientos aprendidos en el nivel medio, en cuanto a propiedades y operaciones de los números reales, ecuaciones, factorización de expresiones racionales y propiedades de exponentes y radicales.

1.1 Los Números Reales

"Un número es la expresión de una cantidad con relación a su unidad".

Los conocimientos matemáticos surgen ligados a cuestiones prácticas. El desarrollo de la teoría de los números es paralelo al de la medida, la ampliación del campo numérico viene de la mano de las necesidades de medición.

Establecer la medida de una magnitud permite el desarrollo de los números racionales, ya que la unidad elegida, muchas veces, no puede ser contenida una cantidad entera de veces.

Los problemas de las mediciones de magnitudes no se terminan, aunque consideremos la totalidad de los números racionales, ya que no siempre es posible establecer el resultado de una medición con ellos. Pensemos, por ejemplo, en el caso de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno. Es por ello que resulta necesario un conjunto más grande que contenga a todos los números.

Los conjuntos numéricos fueron elaborados lentamente a través de los tiempos; para llegar a los conceptos que hoy nos parecen sencillos y lógicos, pasaron muchos siglos y diferentes culturas realizaron sus aportes.

Los **conjuntos numéricos** son agrupaciones de números que guardan una serie de **propiedades que los caracterizan**.

El concepto de número surgió en la antigüedad, ampliándose y generalizándose con el tiempo. En el mundo occidental antiguo, Babilonia, Grecia, Egipto y Roma, desarrollaron elevados conocimientos matemáticos, que fueron aplicados a importantes obras agrícolas y arquitectónicas. Por su parte en el mundo oriental, se observa ya en el siglo III a. C., en la cultura china, que los números negativos son representados mediante barras de color negro y los números positivos por barras de color rojo.

Hacia el año 500, en la India, se plasmaron los orígenes de nuestro sistema de numeración. El principio de posición, valor relativo de las cifras, las nueve cifras y el cero aparecen en las obras del matemático Brahmagupta. En el año 772, una embajada india llevó a Bagdad los libros que recogían estos conocimientos y en la primera mitad del siglo IX se recopilaron los nuevos métodos matemáticos en el tratado de Al-Khwarizmi, siendo difundido por la civilización musulmana en Sicilia y España.

En 1202 el mercader Leonardo Pisano, reunió los conocimientos de aritmética y álgebra en su obra llamada Liber Abaci, difundiendo por Europa la numeración india. En el siglo $XIII$, el matemático italiano Fibonacci, introdujo los números negativos, a raíz de un problema referente al dinero que no tenía una solución positiva, observando así su necesidad.

En el siglo XV se aceptó que algunas ecuaciones tuvieran solución con números negativos. En el siglo XVI, se popularizo el uso de la barra horizontal para separar los términos de una fracción. El problema de los números irracionales no se resolvió por completo hasta el siglo $XVII$, cuando Fermat, matemático francés, considerado el padre de la moderna teoría de los números, demostró que expresiones como raíz cuadrada de tres no eran números racionales. En 1777, Euler solucionó el problema de las raíces negativas. En 1799, Gauss, demostró que las soluciones de cualquier ecuación algebraica, fuera cual fuese su grado, pertenecía a un conjunto de números que él llamó complejos, a los que consideró compuestos de un número ordinario, hoy llamado número real, más un múltiplo de la unidad imaginaria i, donde $i^2 = -1$.

Entre el siglo XVI al XIX, se produjo el desarrollo conceptual de los números reales. En cuanto a las unidades de medición, en el pasado había una multitud de unidades de medida distintas, cada región usaba su propio sistema. Tras la Revolución Francesa se crea un nuevo sistema de medidas: el **Sistema Métrico Decimal**, que fue adoptado por un sin número de estados por ser un sistema regular, debido a reglas que organizan sus unidades de medida y la coherencia interna entre las distintas magnitudes. El metro se presentó formalmente en junio de 1799 bajo el lema ***"Para todos los pueblos, para todos los tiempos"***.

UN POCO DE HISTORIA

El **tratado de Al-Khwarizmi**, describe con detalle el sistema hindú de numeración posicional de base diez y la manera de hacer cálculos con él. Su tratado de álgebra es una introducción compacta al cálculo, usando reglas para completar y reducir ecuaciones. Además de sistematizar la resolución de ecuaciones cuadráticas, también trata geometría, cálculos comerciales y de herencias.

En la historia del mundo contemporáneo, la **Revolución Francesa** significó el tránsito de la sociedad estamental, heredada del feudalismo, a la sociedad capitalista, basada en una economía de mercado. Los revolucionarios franceses crearon un nuevo modelo de sociedad y estado, difundiendo un modo de pensar que fue adoptado por la mayor parte del mundo occidental.

A partir del 20 de mayo de 2019, el sistema de medición sufrirá un cambio, la unidad de medida “kilogramo” será redefinida en el Sistema Internacional de Medidas, que rige desde 1889. En la Conferencia General de Pesos y Medidas, del 16 de noviembre de 2018 realizada en París, expertos de 42 países acordaron una nueva definición del kilo. Su definición tendrá como base una fórmula matemática y ya no dependerá de la magnitud de un objeto físico. Lo que permite un sistema más preciso y asequible en cualquier lugar del mundo.

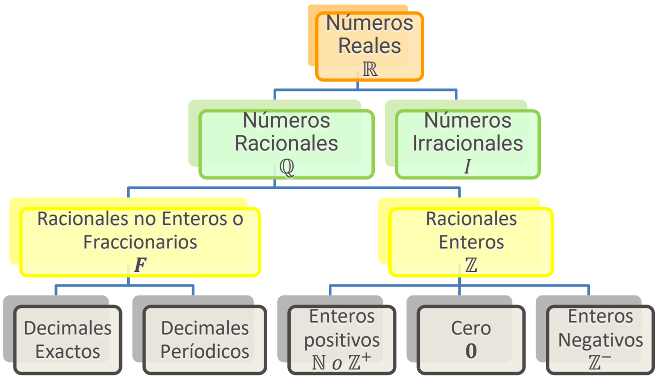
Definición de Números Reales

El conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$) está formado por la unión de los **números racionales** y los **números irracionales**.

Los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) son aquellos que pueden **expresarse como fracción de números enteros**. Por lo tanto, pertenecen a este conjunto los números naturales ($\mathbb{N}$), los números enteros ($\mathbb{Z}$) y los números racionales no enteros, también llamados fraccionarios (F) que se componen por las expresiones decimales y las periódicas.

Los **números irracionales** (I) son aquellos que **no pueden escribirse como fracción de números enteros** y no tienen período (su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas).

En el siguiente esquema se presentan a los diferentes conjuntos numéricos con los que trabajaremos a lo largo de la asignatura:

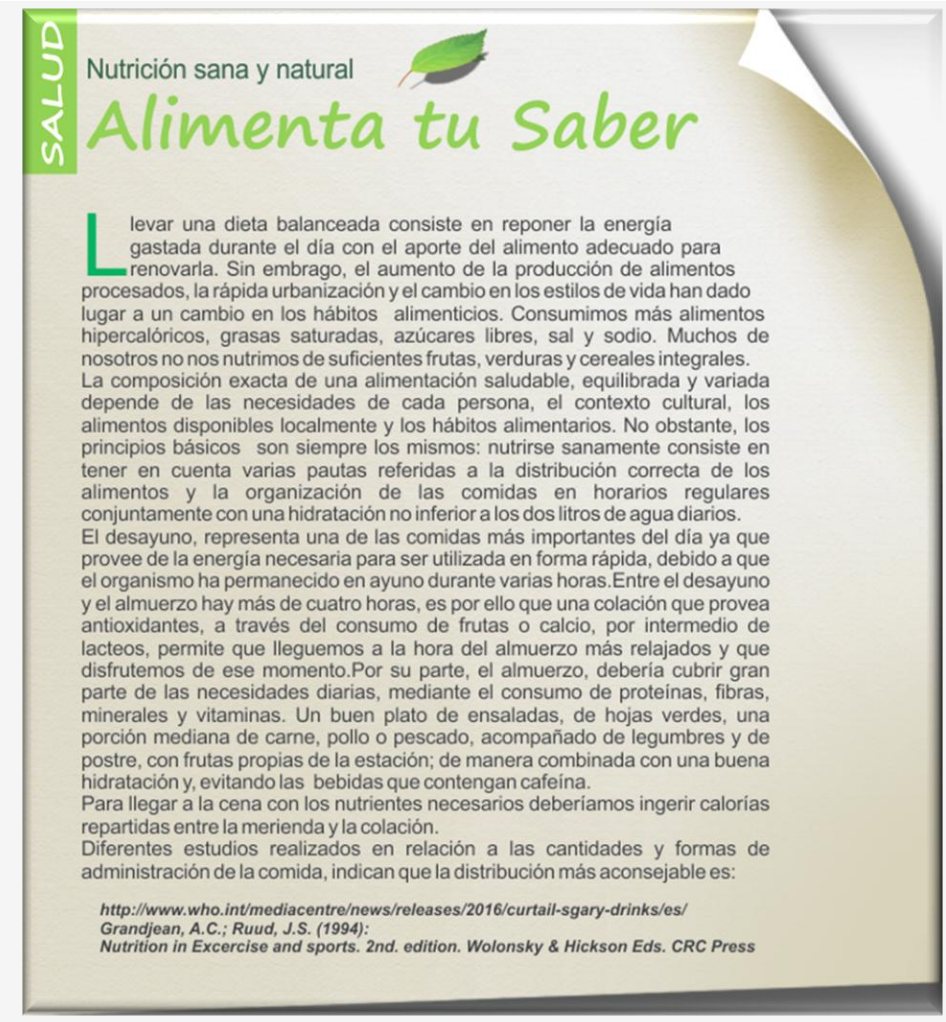


CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚMEROS REALES

1) Forman un conjunto infinito, que no tiene ni primer ni último elemento.
2) Entre dos números reales hay infinitos números reales.
3) A cada número real, le corresponde un único punto en la recta numérica. Recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un solo número real. El conjunto $\mathbb{R}$ “completa” o “llena” la recta numérica.

Fig: 3.: Los Números Reales

Para una mejor comprensión trabajaremos con un ejemplo cotidiano en el que distinguiremos los números que forman el conjunto de los números reales.



SALUD

Nutrición sana y natural

Alimenta tu Saber

Llevar una dieta balanceada consiste en reponer la energía gastada durante el día con el aporte del alimento adecuado para renovarla. Sin embrago, el aumento de la producción de alimentos procesados, la rápida urbanización y el cambio en los estilos de vida han dado lugar a un cambio en los hábitos alimenticios. Consumimos más alimentos hipercalóricos, grasas saturadas, azúcares libres, sal y sodio. Muchos de nosotros no nos nutrimos de suficientes frutas, verduras y cereales integrales.
La composición exacta de una alimentación saludable, equilibrada y variada depende de las necesidades de cada persona, el contexto cultural, los alimentos disponibles localmente y los hábitos alimentarios. No obstante, los principios básicos son siempre los mismos: nutrirse sanamente consiste en tener en cuenta varias pautas referidas a la distribución correcta de los alimentos y la organización de las comidas en horarios regulares conjuntamente con una hidratación no inferior a los dos litros de agua diarios.
El desayuno, representa una de las comidas más importantes del día ya que provee de la energía necesaria para ser utilizada en forma rápida, debido a que el organismo ha permanecido en ayuno durante varias horas.Entre el desayuno y el almuerzo hay más de cuatro horas, es por ello que una colación que provea antioxidantes, a través del consumo de frutas o calcio, por intermedio de lacteos, permite que lleguemos a la hora del almuerzo más relajados y que disfrutemos de ese momento.Por su parte, el almuerzo, debería cubrir gran parte de las necesidades diarias, mediante el consumo de proteínas, fibras, minerales y vitaminas. Un buen plato de ensaladas, de hojas verdes, una porción mediana de carne, pollo o pescado, acompañado de legumbres y de postre, con frutas propias de la estación; de manera combinada con una buena hidratación y, evitando las bebidas que contengan cafeína.
Para llegar a la cena con los nutrientes necesarios deberíamos ingerir calorías repartidas entre la merienda y la colación.
Diferentes estudios realizados en relación a las cantidades y formas de administración de la comida, indican que la distribución más aconsejable es:

http://www.who.int/mediacentre/news/releases/2016/curtail-sgary-drinks/es/
Grandjean, A.C.; Ruud, J.S. (1994):
Nutrition in Excercise and sports. 2nd. edition. Wolonsky & Hickson Eds. CRC Press

Fig. 4.: Nutrición Sana y Natural

De la lectura anterior supone que, para considerar un desayuno saludable, que aporte la cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas se deba ingerir un vaso de leche, una manzana y una barra de cereal.

¿Con qué conjunto de números estamos trabajando para los alimentos consumidos?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Cantidad	Producto
1	Vaso de leche
1	Manzana
1	Barra de cereales

Tabla N°4

Este conjunto representa el conjunto de los **números naturales**:

$$\mathbb{N}: \{1,2,3,\cdots\} \text{ ó } \{x/x \in \mathbb{N}\}$$

Lo simbolizamos entre llaves, nombrando los primeros elementos y escribiendo tres puntos suspensivos, dado que el listado continúa sin fin. Con este conjunto podemos sumar y multiplicar, obteniendo como resultado otro número natural, pero no siempre es posible restar y dividir dos números naturales y obtener como resultado otro número natural.

Surge entonces:

El conjunto de los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-: \{\cdots,-4,-3,-2,-1\}$), junto al cero $\{0\}$ y a los naturales (también llamados enteros positivos, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$), forman el conjunto de los **números enteros**:

$$\mathbb{Z} = Z^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

En este conjunto es posible resolver, además de la suma y multiplicación, la resta y obtener como resultado otro número entero.

Si quisiéramos saber la cantidad de calorías que aportan estos alimentos:

https://goo.gl/qqwXbi

PRODUCTO	KCALORIAS /100GR	PROTEINAS /100GR	GRASAS /100GR	CARBOHIDRATOS /100GR	PRECIO POR UNIDAD DE MEDIDA	UNIDAD DE MEDIDA
LECHE	KCALORIAS /100GR	PROTEINAS /100GR	GRASAS /100GR	CARBOHIDRATOS /100GR	PRECIO POR UNIDAD DE MEDIDA	UNIDAD DE MEDIDA
Leche Desnatada	33	3,4	0,2	4,7	$ 12,52	1032gr (1 litro)
FRUTAS	KCALORIAS /100GR	PROTEINAS /100GR	GRASAS /100GR	CARBOHIDRATOS /100GR	PRECIO POR UNIDAD DE MEDIDA	UNIDAD DE MEDIDA
Manzana	45	0,2	0,3	10,4	$ 39,90	1000gr
CEREALES	KCALORIAS /100GR	PROTEINAS /100GR	GRASAS /100GR	CARBOHIDRATOS /100GR	PRECIO POR UNIDAD DE MEDIDA	UNIDAD DE MEDIDA
Barra de Cereales	406	11	16	54	$ 7,50	30gr (1 Barra)

Es importante destacar que no es posible enumerar a todos los elementos que componen el conjunto de los números naturales, pero en vez de ello, podemos expresar cuáles son sus elementos a través de una condición que se establece entre llaves y utilizando el símbolo " / " (tal que). Esta forma de denotar al conjunto se denomina **por comprensión**.

Los elementos de un conjunto numérico se listan de menor a mayor.

Tabla N°5

Para calcular las calorías que tiene un vaso de leche, primero se debe obtener la cantidad de calorías que tiene un litro de leche.

Un litro de leche $340{,}56\ KCa$ → Un vaso de leche $85{,}14\ KCal$

Fig. 5.: Proporciones y Equivalencias

Dentro del conjunto de los números enteros, no todas las divisiones de dos números enteros dan como resultado otro número entero y esto ocurre cuando el **dividendo** no es múltiplo del **divisor**.

Los **números fraccionarios**, F, dan solución a esta situación y junto a los enteros forman el conjunto de los números racionales, simbolizado con una $\mathbb{Q}$. Este último conjunto, comprende a todo número que pueda expresarse como un cociente $\frac{p}{q}$, donde tanto "p" como "q" son enteros y $q \neq 0$.

Hay dos maneras de escribir un mismo número racional, como fracción o en forma decimal resolviendo el cociente.

Existen números que no son racionales como, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado lado 1 mide una longitud igual a la raíz cuadrada de 2, es decir $\sqrt{2}$. Esta expresión no puede escribirse como un cociente de números enteros. Es por ello que, $\sqrt{2}$ lleva el nombre de número irracional (Ver Fig. 6).

Otros números irracionales son: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}, -\sqrt{10}, \pi$. Este último (Ver Fig. 6) es la razón entre la distancia alrededor de un círculo (*su circunferencia*) y la distancia a través de él (*su diámetro*).

Así se completa el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con el subconjunto de los números irracionales, I:

Los números irracionales, I, no pueden ser escritos como una división entre enteros y se expresan **con infinitas cifras decimales NO periódicas**. Algunos provienen de raíces no exactas.

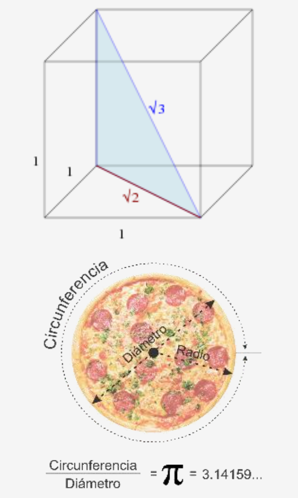


Fig. 6.: Números Irracionales

Para trabajar con los conjuntos numéricos se deben recordar las operaciones y sus propiedades, las expresiones algebraicas, las ecuaciones e inecuaciones. Puedes consultar estos temas en **Capítulo N°0**.

1.1.1 Representación de los Números Reales en la Recta

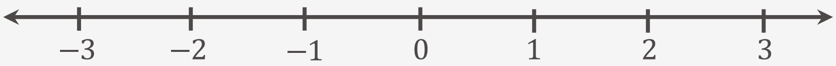
Seguramente ya conoces cómo representar a los números en una recta numérica, pero ¿cómo la introducimos en nuestra vida cotidiana? En los textos que leemos es frecuente encontrar referencias a lustros, décadas, etc. Trabajar con magnitudes es objeto sistemático no solo de la matemática, sino también de la historia.

Para comprender la relación biunívoca que existe entre los puntos de la recta y los números reales, es posible pensar que, al representar diferentes acontecimientos transcurridos en el tiempo, se tiene la percepción intuitiva de que éste es una magnitud continua, que transcurre sin saltos ni interrupciones.

Una recta es la representación ideal del tiempo, que viene desde el menos infinito, se extiende hacia el infinito y que en cada punto de la recta representa un instante en el tiempo, un número real. Además, los días, las semanas, meses, años, lustros, décadas, siglos, milenios, etc. son intervalos de diferentes tamaños contenidos dentro del campo numérico real.

Definición de Recta Numérica o Recta Real:

La recta numérica o recta real es un gráfico unidimensional de una línea recta, la cual contiene a todos los números reales mediante una correspondencia biunívoca, en donde se asocia cada número con un punto de la recta.



De esta manera, a cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta.

Para representar un punto en la recta, se selecciona un punto que representa el cero, llamado origen, luego se elige un segmento unidad, cuya medida se marca sucesivamente a la derecha y a la izquierda del cero. Las posiciones a la derecha del origen son consideradas positivas y a la izquierda negativas.

Al construir una gráfica del tiempo, las medidas se hacen a partir de un punto de referencia que como es lógico representa un instante. Podemos tomar como referencia el nacimiento de Cristo para considerar el momento cero, y en base a esto, ubicar instantes en el tiempo que se encuentran antes y después. Cómo por ejemplo el conocimiento de la utilidad del fuego para procurar de luz, calor y cocer alimentos, la construcción de las primeras ruedas, la escritura. Mientras que, la Revolución Francesa, la caída de la bolsa en Wall Street, la sanción de la de la Ley de Convertibilidad del Austral, se produjeron en momentos de tiempo posteriores. Ese punto que simboliza un instante, a partir del cual se miden los hechos en la gráfica, se representa por cero. A partir del abordaje del **Capítulo N°3**, profundizaremos sobre este concepto.

Una **variable** es una propiedad característica, susceptible de tomar diferentes valores, los cuales se pueden observar y medir. Las variables se pueden clasificar en: **cualitativas**, aquellas que no se pueden medir numéricamente, como la nacionalidad, el color de la piel, el sexo y **cuantitativas**, aquellas que tienen un valor numérico, como la edad, el precio de un producto, los ingresos anuales de un consumidor. Estas últimas a su vez, pueden clasificarse en **discretas** o **continuas**. Las **discretas,** solo pueden tomar valores enteros, como por ejemplo el número de plantas atacadas por una peste, el número de crías por parición, los hermanos en una familia. **Continuas**, pueden tomar cualquier valor real dentro de un intervalo o rango, como el peso, el tiempo, el rendimiento de una empresa, etc.

1.1.2 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 1: Lee el texto que encontraras en el siguiente link y se te solicita que:

https://goo.gl/vkqWXx

a) Elabores un desayuno saludable para una persona deportista y una que no practique deportes.
b) Representes en la recta numérica los valores obtenidos.
c) Clasifiques a qué conjunto de números pertenecen los valores obtenidos.

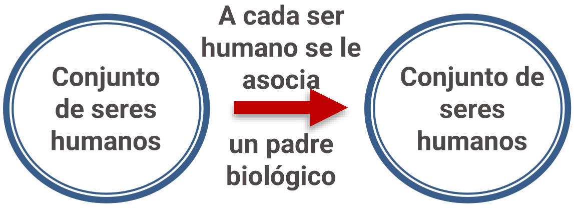
1.2 Relación

Definición de Relación:

Una relación es un vínculo o una correspondencia que hay entre dos o más cosas.

Las aplicaciones de las relaciones trascienden los límites de la ciencia, a diario solemos hacer uso de sus principios muchas veces de manera inconsciente. Seres humanos, edificios, electrodomésticos, películas y amigos, entre otros muchos, son algunos de los conjuntos más comunes de interés para nosotros, y cotidianamente establecemos relaciones entre ellos para organizarnos y participar de nuestras actividades.

Se define la relación entre seres humanos "a cada ser humano se le asocia un padre biológico".



Todo ser humano tiene un único padre biológico. No todo ser humano es un padre biológico.

Fig. 7.: Ejemplo de Funciones

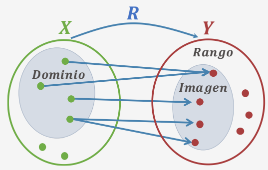
Definición de Relación Matemática:

Una **relación matemática** entre dos conjuntos X e Y es una **regla o ley de correspondencia** que vincula elementos del conjunto X con elementos del conjunto Y. Los conjuntos X y Y se denominan respectivamente, **Conjunto de Partida** y **Conjunto de llegada o Rango** de la relación.

El **dominio de una relación** es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de partida que están relacionados con, al menos, un elemento del conjunto de llegada.

La **imagen de una relación** es el conjunto formado por los elementos del conjunto de llegada que están relacionados con algún elemento del dominio de la relación.

RELACIÓN



Lee atentamente el siguiente informe:

Por cuarto año consecutivo, FADA[4] publicó **"El campo argentino en números".**

Este trabajo refleja los aportes del campo argentino durante el año 2017 en **producción, PBI, recaudación tributaria, divisas por exportaciones y empleo**.

Fig. 8.: Informe FADA 2017

https://goo.gl/MPQahR

[4] Fundación Agropecuaria para el Desarrollo de Argentina

¿La relación del campo argentino con la producción, el PBI, la recaudación tributaria, las divisas por exportaciones y el empleo genera un vínculo o una correspondencia? ¿Por qué?

………

………

………

………

………

…………………………………………………………………………………………………

………

1.3 Función

Gottfried Wilhelm Leibniz introdujo el término ***función*** en el vocabulario matemático en el siglo $XVII$. Se trata de uno de los conceptos elementales de las matemáticas, y es esencial para el estudio del cálculo.

Con frecuencia, la palabra función, no se utiliza correctamente. A lo largo de décadas la economía argentina comienza su ciclo expansivo en función de un aumento progresivo de los precios de las materias primas y la disminución de las tasas de interés, lo que incentiva a capitales internacionales a invertir en países periféricos como el nuestro[5].

¿Puedes afirmar que el alza en los precios de los commodities está en función de la baja o disminución de las tasas de interés?

………

………

……

………

………

Commodities es un término que proviene del idioma inglés, corresponde al plural del término commodity que en esta lengua se utiliza para denominar a los productos, mercancías o materias primas. Representa a todo bien que tiene valor o utilidad, y un muy bajo nivel de diferenciación o especialización.

[5] Seggiaro, C. (2015). La Economía Argentina. De dónde venimos y hacia dónde vamos. Eduvim, Villa María.

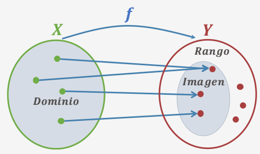
A pesar de que esto sucedió muchas veces, no se puede afirmar que la cantidad de **entrada**, la tasa de interés determina la cantidad de **salida**, el precio de las materias primas.

Definición de Función:

Una ***función*** es una regla o ley de correspondencia que asigna **a cada número de entrada exactamente un número de salida**.

Al conjunto de números de *entradas* para el cual se le aplica la regla, se llama **dominio** de la función. Al conjunto de todos los números posibles de *salida* se lo llama **rango**.

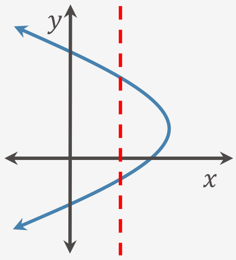
FUNCIÓN



Una **función** modeliza una situación en la que existe una relación de dependencia entre dos variables que intervienen en dicha situación. La variable que representa los **números de entrada** para una función se denomina **variable independiente**. La variable que representa los **números de salida** se denomina **variable dependiente**, porque su valor depende de la variable independiente.

Se dice que la variable dependiente es una función de la variable independiente.

La siguiente representación gráfica es una relación.



NO ES UNA FUNCIÓN

Definición de Dominio

El conjunto **Dominio** de una función está formado por todos los valores que toma la variable independiente.

Se simboliza: $\boldsymbol{Dom\ f}$

Para establecer el dominio de una función, se deberá considerar:

El **Contexto del Problema**: por ejemplo, si la variable independiente son los días transcurridos en el mes hasta que se produce la variación en el precio de un bien, se puede decidir limitar el dominio a valores mayores que 1 pero menores a 30 días.

La propia **Decisión de quien propone el Análisis**: si a un administrador le interesa analizar particularmente, costo de unidades producidas, es probable que circunscriba su análisis al nivel de producción que tenga la empresa u organización.

Las **Limitaciones analíticas de la Expresión Algebraica**: cuando la función, relaciona dos conjuntos de números y solo disponemos de la fórmula o expresión algebraica que representa la relación entre las dos variables, el dominio es el conjunto más grande de números para el cual la expresión tiene sentido. Es decir, el conjunto de valores para los cuales se pueden efectuar las operaciones que permiten la aplicación de la regla o formula.

Definición de Imagen

El conjunto Imagen de una función es un subconjunto del Rango y está formado por los valores que toma la función.
Se simboliza: $\boldsymbol{Im\ f}$.

Si se observa la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y se determina el dominio y la imagen.

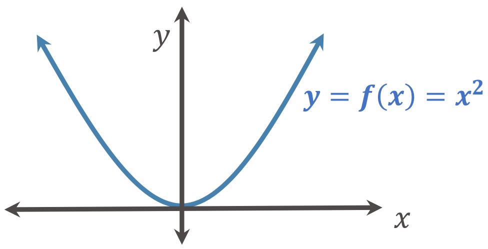


Fig. 9.: $f(x) = x^2$

Resolución:

Al observar la gráfica y analizando la expresión algebraica, el conjunto dominio, corresponde al conjunto más grande de valores que pueda asumir la variable x, que es el propio conjunto de números reales, ya que cualquier valor real de x elevado al cuadrado dará como resultado otro número real. De este modo escribimos:

$$Dom\ f = \{x / x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$$

Encontrar la imagen de una función analíticamente, no es sencillo. Por ello, en este caso la obtendremos a partir del gráfico de la función.

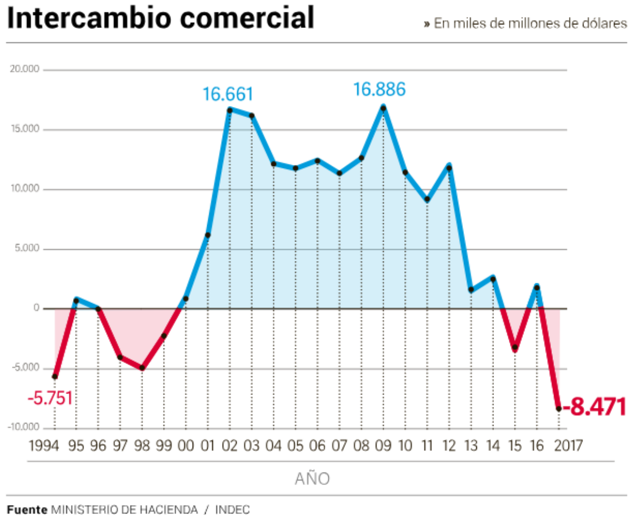
$$Im\ f = [0; +\infty)$$

La **imagen** de una función gráficamente se la obtiene **proyectando cada uno de los puntos** del gráfico de la función sobre el eje de ordenadas y el segmento que se obtiene es la imagen.

Si se observa la Fig. 9, el ejemplo proporciona la clave para que el uso de la palabra función sea preciso:

"Para ***cada valor de entrada****, x, existe exactamente* ***un valor de salida****, y, pero, pueden existir* ***más de un valor de entrada****, x, al que le corresponda* ***el mismo valor de salida, y****".*

https://goo.gl/i2gPd7



La gráfica corresponde a la **balanza comercial argentina** desde el año 1994 al 2017. **El superávit** comercial se encuentra representado por los períodos coloreados con **azul (por encima de la ordenada cero)** y **el déficit** comercial en los coloreados con **rojo (por debajo de la ordenada cero)**.

Fig. 10.: Balanza Comercial Argentina

¿Puedes determinar cuál es la variable independiente y cuál la dependiente de la situación bajo estudio?, ¿en qué unidades se encuentran medidas?

....

....

....

....

....

....

....

1.3.1 Representaciones de una Función

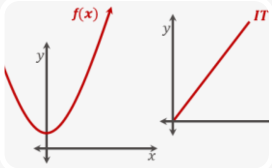
Existen diferentes formas de representar a una función. **Verbalmente**, mediante una descripción en palabras. **Numéricamente**, a través de una tabla de valores. **Visualmente,** con una gráfica. **Algebraicamente**, con una fórmula explícita.

A menudo resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir un conocimiento adicional de una función.

La **balanza comercial** es un registro de importaciones y exportaciones de un país en determinado período. El saldo de la balanza comercial es la diferencia del total de las exportaciones y el total de las importaciones que se manejan en el país.

$$0(p) = p^2$$
$$C(x) = 2x + 350$$
$$M(t) = C(1 + i)^t$$

x	$f(x)$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27



La **Expresión Analítica** de una función es una ecuación que relaciona la variable dependiente con la variable independiente.

Los pares de valores (x, y) que obtenemos de una función los podemos organizar en una tabla denominada **Tabla de Valores** de la función.

El **Sistema de Coordenadas Rectangulares** permite representar funciones.

Fig. 11.: Representaciones de una Función

Observa nuevamente la Fig. 10 de la Balanza Comercial Argentina ¿de qué forma está representada? ¿podemos afirmar que corresponde a una función? ¿en qué períodos hubo déficit y en cuál superávit? ¿cuándo estuvo en alza y cuándo en baja?

……

……

……

……

……

……………………………………………………………………………………………………

INTERVALOS

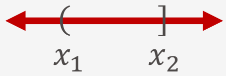
Conjunto de números reales comprendidos entre dos valores, llamados extremos del intervalo.

Intervalo abierto: $(x_1; x_2)$

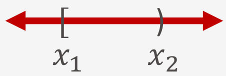
Intervalo cerrado: $[x_1; x_2]$

Intervalos semiabiertos:

$(x_1; x_2]$



$[x_1; x_2)$



1.3.2 Gráficas

El **sistema de coordenadas rectangulares** permite especificar y localizar puntos en un plano. También proporciona una manera geométrica de representar ecuaciones de dos variables, así como funciones.

Recordemos algunos conceptos

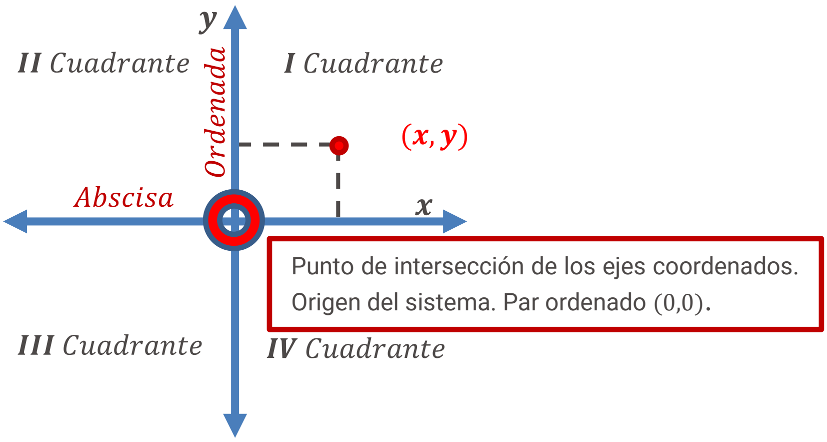


Fig. 12.: Sistema de Coordenadas Cartesianas

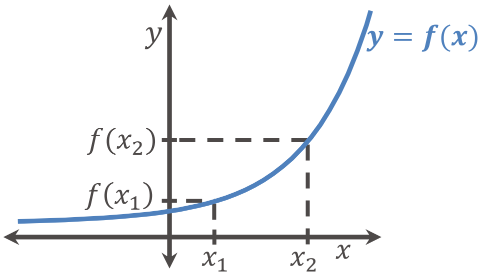
1.3.3 Interpretación de Gráficas

Los tramos en que una función crece o decrece, asume valores positivos, negativos o nulos, los puntos en que toma valores mayores o menores a los que le rodean, son todos aspectos muy importantes para el estudio de una función.

La representación gráfica de una función nos permite visualizar su comportamiento. Te recordamos algunos conceptos para que puedas interpretar gráficas.

Definición de Función Creciente

Una función f es **creciente** en un intervalo si para cualquier par de números x_1 y x_2 del intervalo tal que $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Gráficamente:

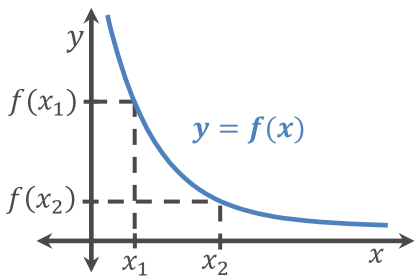


Es importante destacar que, los **intervalos del dominio** para los que la **función crece** son siempre **intervalos abiertos**.

Fig. 13.: Función Creciente

Definición de Función Decreciente

Una función f es **decreciente** en un intervalo si para cualquier par de números x_1 y x_2 del intervalo tal que $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$. Gráficamente:



Es importante destacar que, los **intervalos del dominio** para los que la **función decrece** son siempre **intervalos abiertos**.

Fig. 14.: Función Decreciente

Los intervalos para los que la función es creciente, decreciente, positiva, negativa o nula, son siempre intervalos que pertenecen al dominio de definición de la función.

Definición de Máximo Absoluto

Una función alcanza un **máximo absoluto** en $x = a$ si su ordenada $\boldsymbol{f(a)}$ **es mayor o igual** que la ordenada de cualquier otro punto del dominio de la función.

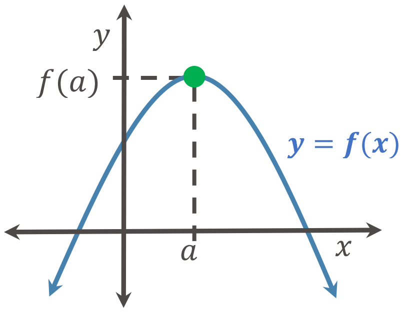


Fig. 15.: Máximo Absoluto

Definición de Mínimo Absoluto

Una función alcanza un **mínimo absoluto** en $x = a$ si su ordenada $\boldsymbol{f(a)}$ **es menor o igual** que la ordenada de cualquier otro punto del dominio de la función.

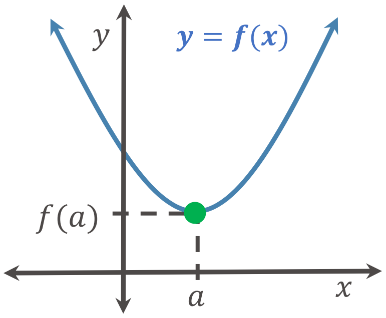


Fig. 16.: Mínimo Absoluto

Definición de Intervalos de Positividad y Negatividad

Intervalo de positividad es el conjunto formado por los valores de x para los cuales $\boldsymbol{f(x) > 0}$. Gráficamente corresponde al intervalo o intervalos del dominio (los valores de x), en los cuales **la curva se encuentra por encima del eje $\boldsymbol{x}$.**

Intervalo de negatividad es el conjunto formado por los valores de x para los cuales $\boldsymbol{f(x) < 0}$. Gráficamente corresponde al intervalo o intervalos del dominio (los valores de x), en los cuales **la curva se encuentra por debajo del eje $\boldsymbol{x}$.**

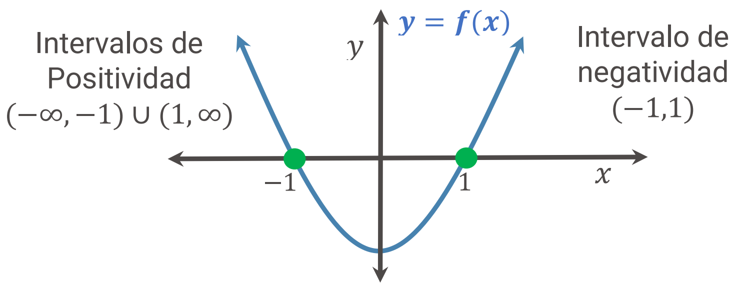


Fig. 17.: Intervalos de Positividad y Negatividad

1.3.4 Puntos Notables: Intersección y Simetrías

Los puntos notables de $y = f(x)$, son puntos que pertenecen al gráfico de la función y que son especialmente representativos.

Definición de intersección con los ejes coordenados

Intersección con el eje de ordenadas, es *el punto* de la función que tiene por coordenadas a: $(0, f(0))$, se obtiene cuando la **Variable Independiente toma el valor cero** $(\boldsymbol{x = 0})$.

Intersección con el eje de abscisas, son *los puntos* de la función que tiene por coordenadas a: $(x, 0)$, se obtiene cuando la **Variable Dependiente toma el valor cero** $(\boldsymbol{f(x) = 0})$.

Los valores que verifican la igualdad $\boldsymbol{f(x) = 0}$, conforman los ceros de la función o los valores que anulan a la función.

Definición de Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas, si una función f verifica que $f(x) = f(-x)$, entonces su gráfica es **simétrica respecto al eje $\boldsymbol{y}$**, y se dice que la función es **PAR**.

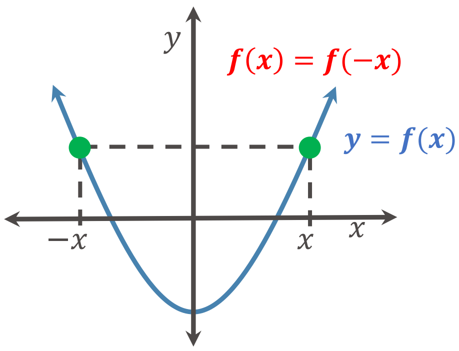


Fig. 18.: Función Par

Simetría respecto al origen del sistema de coordenadas, si una función f verifica que $f(x) = -f(-x)$, entonces su gráfica es **simétrica respecto al origen**, y se dice que la función es **IMPAR**.

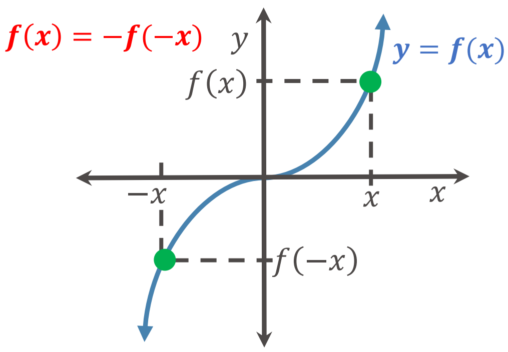


Fig. 19.: Función Impar

¿Puede una función ser simétrica respecto al eje de abscisas? Justifica tu respuesta.

………

………

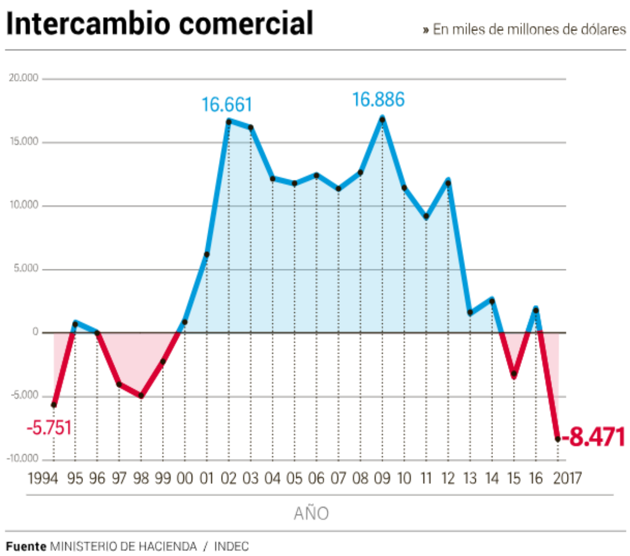
……………………………………………………………………………………………………

………

………

1.3.5 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 2: Luego de observar la figura de la Balanza Comercial Argentina, se te solicita que respondas:



La gráfica corresponde a la **balanza comercial argentina** desde el año 1994 al 2017. **El superávit** comercial se encuentra representado por los períodos coloreados con **azul (por encima de la ordenada cero)** y **el déficit** comercial en los coloreados con **rojo (por debajo de la ordenada cero)**.

Datos del INDEC
https://goo.gl/i2gPd7

a) ¿Cuál es el **dominio** y la **imagen** de la función?

b) ¿Cuáles son los intervalos del dominio (**valores de x**) donde la función resulta **creciente**?

c) ¿Cuáles son los intervalos del dominio (**valores de x**) donde la función resulta **decreciente**?

d) ¿Cuáles son los intervalos del dominio donde la función resulta **positiva** y en cuáles **negativa**?

e) ¿Cuáles son los valores del dominio donde la función es **nula**?

f) ¿Para qué **valores de x** la función alcanza el **máximo absoluto** y el **mínimo absoluto**?

<u>ACTIVIDAD 3</u>: Realiza un informe, utilizando las herramientas matemáticas aprendidas, acerca del comportamiento de la Balanza Comercial Argentina en el período $1994 - 2017$. Si requieres más espacio, puedes utilizar una hoja adicional.

……

……

……

1.4 Algunas Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

A continuación, se muestran en detalle algunas de las funciones más utilizadas.

Definición de Funciones Polinómicas

Son aquellas funciones cuya expresión algebraica es un **polinomio**.

Una función polinómica de **grado n**, siendo $a_n \neq 0$ y **n un número entero no negativo**, presenta la siguiente estructura:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

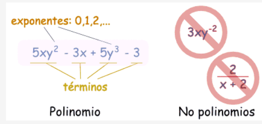
Su **dominio** son todos los **reales**.

Ejemplo de funciones polinómicas son: las **funciones constantes**, las **funciones lineales** y las **funciones cuadráticas**, etc.

Puedes consultar este tema en el **Punto 2.1.1 del Capítulo N°2** del libro.

Definición de Funciones Definidas por Segmentos

Son aquellas funciones para las que su regla de asignación está dada por **más de una expresión algebraica**. Algunos valores de la variable independiente se relacionan con sus correspondientes valores de imagen a través de una regla o fórmula, mientras que otros valores del dominio se relacionan a través de otra fórmula distinta a la anterior.



Los polinomios están constituidos por un conjunto finito de variables y constantes (llamadas coeficientes o parámetros), con las operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación, así como también exponentes enteros positivos. Pueden ser de una o de varias variables.

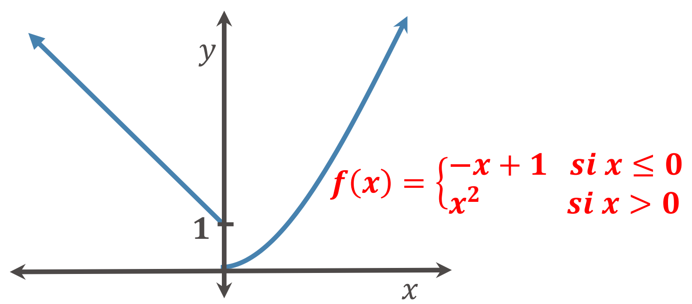


Fig. 20.: Función Definida por Segmentos

La fig. 20 muestra la gráfica de una **función definida por segmentos** y su correspondiente expresión algebraica.

Otra función que se considerará es la racional, la cual no va de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ ya que su dominio son los números reales que no hacen cero el denominador

Definición de Funciones Racionales

Son funciones definidas como el **cociente de polinomios**, de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \; con \; Q(x) \neq 0$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas. Siendo $Q(x) \neq 0$.

El dominio de una función racional, es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los cuales $Q(x) = 0$.

1.4.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 4: Para las siguientes funciones definidas por segmentos se te solicita que:

$$i) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 & si\ x < 1 \\ x+3 & si\ x > 1 \end{cases} \qquad ii) \quad g(x) = \begin{cases} x+5 & si\ x \leq -3 \\ 2 & si\ -3 < x < 3 \\ -x+5 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

a) Grafiques las funciones.

b) Para cada función determines: Dominio e imagen, intersección con los ejes coordenados e intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad.

ACTIVIDAD 5: Una empresa posee **altos costos de inventario** en una mercadería específica y desea reducirlos mediante una política de ventas atractiva para sus clientes. Para lograrlo, la mercadería tiene tres precios diferenciados de acuerdo a las cantidades adquiridas:

Precio	Cantidades Vendidas
150	Menos de 10 unidades
130	Entre 10 y 30 unidades
110	Más de 30 unidades

Se te solicita que:

a) Representes algebraicamente el ingreso de la empresa según la política de ventas de la misma, considerando alguna de las funciones estudiadas en el punto 1.5.

b) Realices la representación gráfica.

c) Elabores un breve informe de acuerdo a lo aprendido en esta actividad.

Los **costos de inventario** son aquellos que están relacionados con el almacenamiento, aprovisionamiento y mantenimiento del inventario en determinado período de tiempo.

1.5 Combinación de Funciones

Existen tres formas de combinar funciones para crear una nueva función.

1.5.1 Por Medio de Adición, Sustracción, Multiplicación y División de Funciones

Suponga que I y C son las funciones dadas por:

$I(x) = 5x^2$ y $C(x) = 3x + 2500$

La diferencia o sustracción entre $I(x)$ y $C(x)$ se obtiene haciendo $I(x) - C(x) = 5x^2 - (3x + 2500)$ Esta operación define una **nueva función** llamada **diferencia o sustracción** de $I(x)$ y $C(x)$.

Supone que la función $I(x)$, es una función Ingreso y la función $C(x)$, es una función Costo de un determinado producto. ¿La diferencia de los Ingresos y los Costos qué representa?

……

……

……

Definición de Operación de Funciones por Medio de Adición, Sustracción, Multiplicación y División:

En general, para cualesquiera funciones f y g, se define la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** $f.g$ y el **cociente** $\frac{f}{g}$ como sigue:

$\boxed{(f+g)(x) = f(x) + g(x)}$ $\Rightarrow$ **Adición o Suma** de f más g

$\boxed{(f-g)(x) = f(x) - g(x)}$ $\Rightarrow$ **Sustracción o Diferencia** de f menos g

$\boxed{(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)}$ $\Rightarrow$ **Producto** de f por g

$\boxed{\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ para\ g(x) \neq 0}$ $\Rightarrow$ **Cociente** de f sobre g

En cada una de las cuatro combinaciones, se supone que x se encuentra en los dominios tanto de f como de g.

Puedes consultar este tema en el Punto 2.1.1 del Capítulo N°2 del texto.

El dominio de $f+g$, $f-g$, $f.g$, es la intersección de los dominios de f y g. Pero el dominio del cociente $\frac{f}{g}$, es la intersección de los dominios de f y g, excluyendo los valores para los que $g(x) = 0$.

1.5.2 Por Medio de Multiplicación por una Constante

Un caso especial de $f.g$ merece una mención especial.

Para cualquier número real c y cualquier función f, se define $c.f$ mediante:

$$\boxed{(c.f)(x) = c \cdot f(x)}$$

1.5.3 Por Medio de Composición de Funciones

Pueden componerse dos funciones al aplicar primero una función a un número y después la otra función al resultado.

Definición de Composición de Funciones:

Si f y g son funciones, **la composición de f con g es la función $f \circ g$ definida por**:

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$$

Donde el dominio $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g, tales que $g(x)$ este en el dominio de f.

En general la composición de funciones no es conmutativa.
En símbolos:
$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

Gráficamente la situación es:

$$x \xrightarrow{g} \boldsymbol{g(x)} \xrightarrow{f} \boldsymbol{f(g(x))}$$

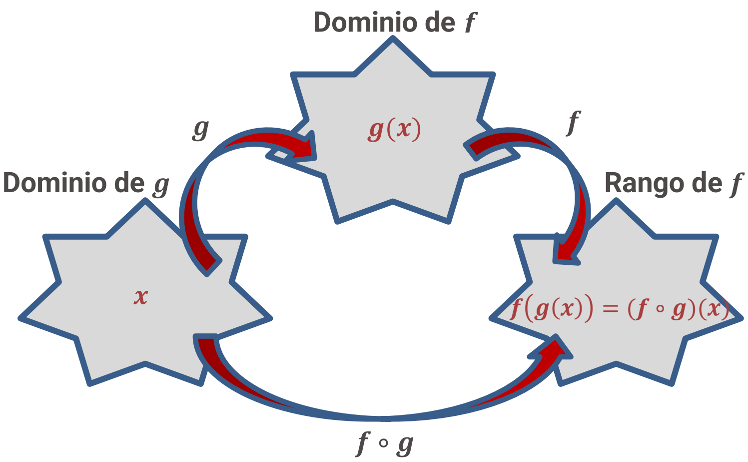


Fig. 21.: Composición de f con g.

Ejemplo, supone que $g(x) = 2x$, $f(x) = x^2$ y $x = 3$, si quisiéramos calcular $f(g(x))$:

$g(x) = 2x$ $f(x) = x^2$	$\Rightarrow$	$x = 3$	$g(3) = 2 \cdot 3 = 6$
g envía la entrada 3 a la salida 6	3	$\xrightarrow{g}$	6
La salida 6 se convierte en la entrada para f	$\Rightarrow$	6	$f(6) = 6^2 = 36$
De modo que f envía 6 al 36	6	$\xrightarrow{f}$	36
$\boldsymbol{f(g(x)) = (2x)^2 = 2^2.x^2 = 4x^2}$ $f(g(3)) = 4.3^2 = 4.9 = 36$			
Al aplicar primero g y después f, se envía 3 al 36:			

3	$\xrightarrow{g}$	6	$\xrightarrow{f}$	36

1.5.4 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 6: El ingreso por la venta de un producto viene dado por la función $I(x) = 5x$ y el costo de dicho producto por la función $C(x) = 2x + 240$. Se te solicita que:

a) Combines la función ingreso y costo para crear la función beneficio.
b) Representes en un mismo sistema de ejes cartesianos las tres funciones.
c) Observes el gráfico obtenido y lo interpretes.

ACTIVIDAD 7: Escribe una función compuesta para representar el precio de góndola al consumidor final como una función del precio mayorista.

ACTIVIDAD 8: De acuerdo con los datos brindados por la catedra Producción de Cereales de la FAyV[6] de la UNRC[7], el rendimiento de la producción de maíz por hectárea, en función a la densidad de semillas en el Gran Río Cuarto es de:

Densidad de semillas (plantas/ha)	Rendimiento (kg/ha)
20000	8000
40000	10000
60000	10700
80000	9200
100000	8400

Actualmente, el costo de la bolsa de 80.000 semillas de maíz es de $4.000 y el ingreso que se obtiene de la venta de maíz, descontado fletes y comisiones, es de $2,2 Kg. Con la información disponible, se te solicita que:

a) Representes los puntos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos.
b) Observes el grafico y respondas: ¿Qué sucede con el rendimiento por hectárea a medida que se siembran mayor cantidad de semillas por hectárea?
c) Calcules el costo de cada semilla.
d) Calcules y grafiques el ingreso que se obtiene por la venta de maíz.
e) Justifiques la siguiente afirmación: “**El ingreso obtenido en la producción de maíz es una función compuesta**”.

Cuando vamos al supermercado para hacer compras, tomamos un producto de la góndola y observamos su precio. ¿El valor coincide con el que el supermercadista lo adquirió al proveedor?

[6] Facultad de Agronomía y Veterinaria
[7] Universidad Nacional de Río Cuarto

1.6 Transformación de Funciones: Traslaciones y Reflexiones

A veces, al modificar una función mediante una manipulación algebraica, puede obtenerse la gráfica de la nueva función a partir de la gráfica de la función original. Algunas funciones y las gráficas a las que están asociadas aparecen con tanta frecuencia, que resulta útil memorizarlas.

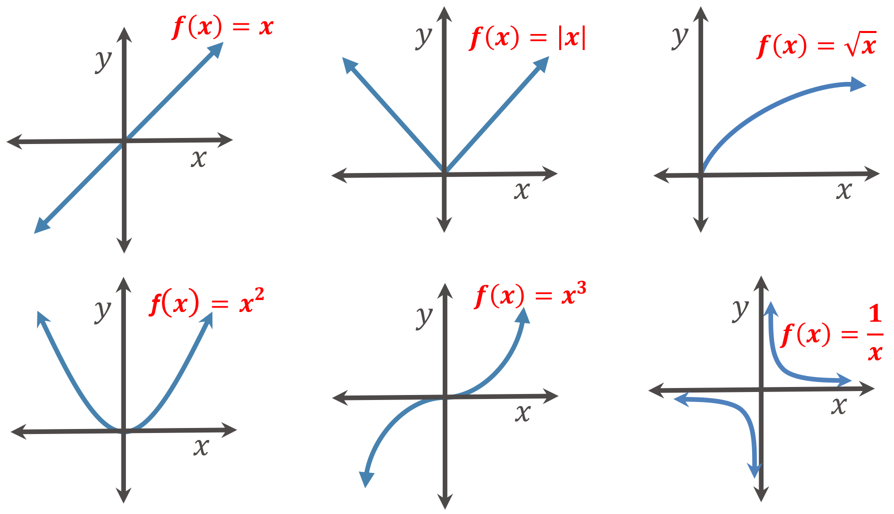
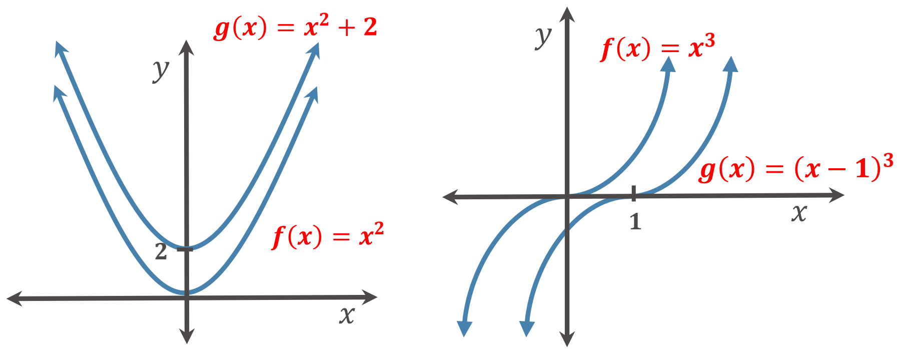


Fig. 22.: Funciones utilizadas con frecuencia

Observemos estos ejemplos donde las gráficas sufren diferentes transformaciones:



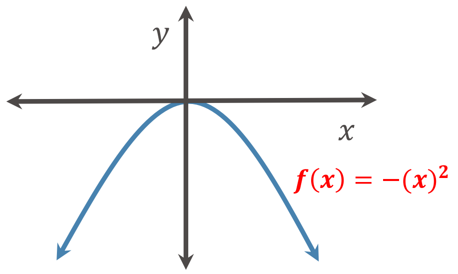
La gráfica de $f(x) = x^2 + 2$ es una **transformación** de la gráfica de $f(x) = x^2$

La gráfica de $f(x) = (x-1)^3$ es una **transformación** de la gráfica de $f(x) = x^3$

Traslación o desplazamiento vertical

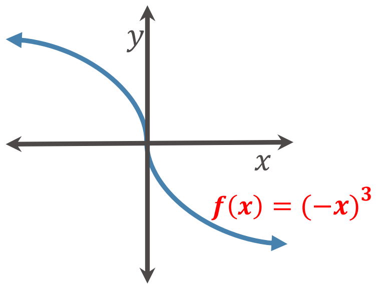
Traslación o desplazamiento horizontal

Fig. 23.: Desplazamiento de funciones



La gráfica de $f(x) = -(x^2)$ es una **transformación** de la gráfica de $f(x) = x^2$

Reflexión con respecto al eje x



La gráfica de $f(x) = (-x)^3$ es una **transformación** de la gráfica de $f(x) = x^3$

Reflexión con respecto al eje y

Fig. 24.: Reflexión de funciones

La siguiente tabla presenta una lista de los tipos básicos de transformaciones.

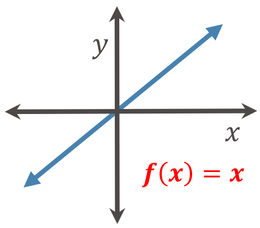
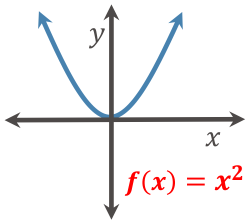
Transformaciones, $c > 0$

Ecuación	Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación.
$y = f(x) + c$	Desplaza c unidades hacia arriba.
$y = f(x) - c$	Desplaza c unidades hacia abajo.
$y = f(x - c)$	Desplaza c unidades hacia la derecha.
$y = f(x + c)$	Desplaza c unidades hacia la izquierda.
$y = -f(x)$	Refleja con respecto al eje x.
$y = f(-x)$	Refleja con respecto al eje y.

Tabla N°6

1.6.1 Guía de Actividades Prácticas

<u>**ACTIVIDAD 9**</u>: A partir de las siguientes gráficas, se te solicita que transformes gráfica y algebraicamente las siguientes funciones. Puedes representar todas las transformaciones en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

	Expresión Analítica	Expresión Gráfica	Transformación de la función
i)	$f(x) = x$		**a)** Desplaza 3 unidades hacia arriba. **b)** Desplaza 2 unidades hacia la derecha. **c)** Refleja con respecto al eje y.
ii)	$f(x) = x^2$		**a)** Desplaza 2 unidades hacia abajo. **b)** Desplaza 3 unidades hacia la izquierda. **c)** Refleja con respecto al eje x.

CAPÍTULO Nº2:

ESTUDIO DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

Objetivos:

Al finalizar este segundo capítulo deberás ser capaz de:

- ✓ Clasificar los distintos tipos de funciones e interpretar la información que brindan sus coeficientes constantes.
- ✓ Distinguir los diferentes comportamientos gráficos de los distintos tipos de funciones.
- ✓ Interpretar el comportamiento de las funciones en modelos económicos.

Contenidos:

2. Estudio de Funciones de una Variable Real

Luego de haber estudiado los conceptos fundamentales sobre **Número Reales** y **Relaciones Funcionales**, continuaremos en este capítulo con el análisis de funciones que frecuentemente aparecen en las situaciones problemáticas que se presentan en las Ciencias Económicas.

Los **Modelos Matemáticos** son los que permiten representar estas situaciones de una forma simplificada y facilitan el entendimiento del fenómeno bajo estudio. Para ello, es fundamental comprender a las variables involucradas y la relación existente entre ellas, de aquí la necesidad de seguir adentrándonos en el análisis matemático.

Para una mejor comprensión sobre la forma en la que se ha estructurado el capítulo, empezaremos estudiando con detenimiento las principales relaciones funcionales (**Funciones Lineales, Funciones Constantes**, **Funciones Cuadráticas**, **Funciones Exponenciales y Funciones Logarítmicas)**. Por cada una de ellas analizaremos su expresión analítica, su dominio de definición, su imagen, su representación gráfica, sus coeficientes constantes, los intervalos donde son positivas, negativas, nulas, crecientes o decrecientes y sus principales aplicaciones económicas. Además, presentaremos guías de actividades prácticas de aplicación con las que se trabajarán los principales conceptos del capítulo.

Un **Modelo Matemático,** es una representación gráfica, esquemática o analítica de una realidad. Sirve para describir de forma clara los elementos que la conforman y ayudan a sus usuarios a tomar decisiones.

2.1 Funciones Lineales

Numerosos dispositivos con los que nos relacionamos cotidianamente ya están programados para realizar operaciones utilizando funciones y resolviendo ecuaciones, aunque no nos demos cuenta. Por ejemplo, cuando vamos a una verdulería, sus empleados disponen de balanzas en las cuales pueden teclear el precio por kilogramo de la verdura que se pesa y automáticamente éstas realizan los cálculos matemáticos y emiten el ticket donde se indica el precio a pagar, correspondiente a la cantidad de verdura pesada.

La siguiente tabla muestra las distintas cantidades pesadas de tomates cherry durante una jornada y su precio, en una de las verdulerías más importantes de la ciudad:

Peso (gr)	Precio a Pagar $(\$)$
100	6
200	12
350	21
600	36
1000	60

Tabla N°7

Si entendemos que el precio a pagar $(\$)$ puede expresarse como una función que depende del peso (gr), la gráfica de esta relación funcional puede representarse como (Fig. 25):

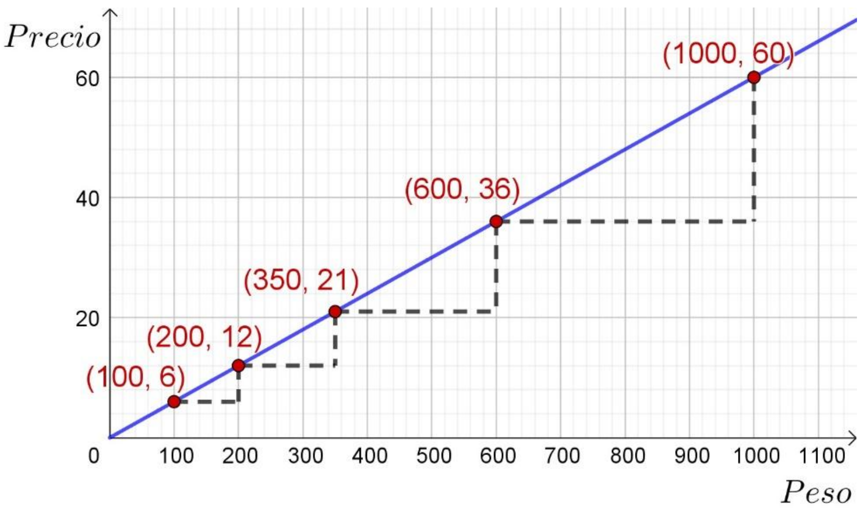


Fig. 25.: Gráfica del Precio a Pagar $(\$)$ del Tomate en Función a su Peso (gr).

Observa que los puntos de la función se pueden unir por medio de una línea recta y que el aumento en el *"precio"* se mantiene para cualquier diferencia de "*peso*" que se quiera calcular. Además, ambas variables asumen valores positivos.

En general, muchos fenómenos y situaciones de la vida diaria se comportan de forma tal que *los cambios que ocurren en la variable dependiente* (y) ***son proporcionales*** *a los que ocurren en la variable independiente* (x). A esta clase de funciones se la incluye dentro de las denominadas **funciones lineales**.

Definición:

Se denomina **Función Lineal** a toda función cuya expresión algebraica es un polinomio de primer grado, es decir:

$$\boldsymbol{y = f(x) = m.x + b}$$

En donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$ son valores reales y $\boldsymbol{m \neq 0}$.

El coeficiente constante $\boldsymbol{m}$ se denomina *pendiente* y el parámetro $\boldsymbol{b}$ *término independiente u ordenada al origen*.

Los valores m y b se conocen como parámetro o coeficientes constantes de la Función Lineal.

El Dominio de definición de una función lineal es el conjunto de los Números Reales y se denota por $Domf = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$. La Imagen de una función lineal es el conjunto de los Números Reales y se denota por $Im\, f = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$.

Toda función lineal cambia a Ritmo Constante ante cambios de la variable independiente $(\boldsymbol{x})$, esto quiere decir que el valor de y aumenta o disminuye en forma constante por cada unidad que aumenta x.

Cuando abordemos el tema **"Análisis Diferencial"** (Capítulo N°5) serás capaz de justificar esta afirmación.

Su representación gráfica es una línea recta. La recta que representa el gráfico de cualquier función lineal cuya expresión es $f(x) = m.x \ + b$, queda determinada por dos puntos que pertenezcan a la misma. La ecuación por la que se representa a la Función Lineal se denomina **Forma Pendiente-Intersección de la Recta**.

$$\boldsymbol{f(x) = m.x + b}$$

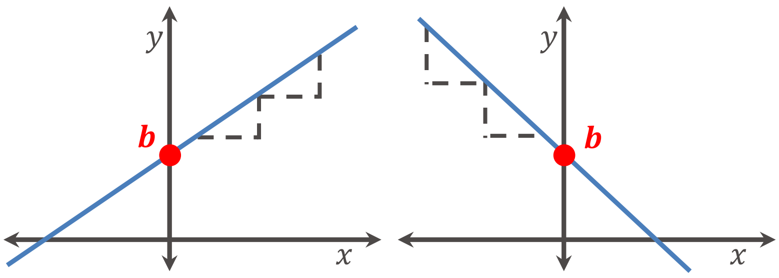


Fig. 26.: Gráficos de Funciones Lineales

Realizaremos ahora la interpretación geométrica de los coeficientes constantes de la función lineal.

Abordaremos el caso $m = 0$ en el **punto 2.2 "Funciones Constantes"** de este capítulo.

2.1.1 Análisis de los Coeficientes Constantes de las Funciones Lineales

Se comenzará presentando el análisis de la pendiente de la recta, es decir el coeficiente constante $\boldsymbol{m}$.

Definición de Pendiente de una Recta:

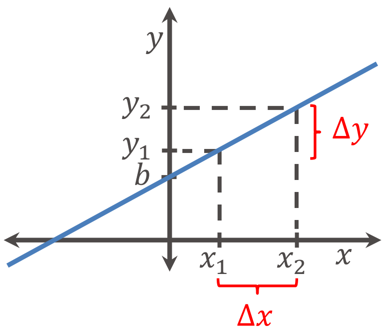
La pendiente $\boldsymbol{m}$ de **una recta no vertical**, que pasa por dos puntos de coordenadas conocidas $(x_1\,;y_1)$ y $(x_2\,;y_2)$ se calcula como:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad \Rightarrow$$

Se lee cambio en y sobre cambio en x.

$\boldsymbol{\Delta y}$: Se llama incremento absoluto de la función y se lee "$delta\ y$".

$\boldsymbol{\Delta x}$: Se llama incremento absoluto de la variable independiente y se lee "$delta\ x$".



Geométricamente la pendiente de la recta da la **magnitud** y el **sentido** del cambio de la función "y" ante cambios en la variable independiente "x". La pendiente está asociada con la inclinación que presenta la recta respecto al eje de abscisas $(eje\ x)$.

Fig. 27.: Interpretación geométrica de la pendiente de una recta

Por definición de función lineal hemos establecido que $m \neq 0$, es por ello que se analizan los dos casos posibles que puede presentar la pendiente. Si la pendiente es positiva, $m > 0$, la Función Lineal es creciente en su dominio, mientras si es negativa, $m < 0$, la Función Lineal decrece en su dominio.

- ✓ Si $m > 0$, la función lineal presenta como intervalo de crecimiento al intervalo $(-\infty; \infty)$.
- ✓ Si $m < 0$, la función lineal presenta como intervalo de decrecimiento al intervalo $(-\infty; \infty)$.

Analizaremos ahora la ordenada al origen, es decir el coeficiente $\boldsymbol{b}$. Al ser $\boldsymbol{b}$ un número real puede asumir valores negativos, positivos o nulo.

A efectos de obtener la pendiente de la recta, es indistinto restar las coordenadas de ambos puntos en un sentido u otro, ya que lo que se está midiendo es la distancia entre las coordenadas de los puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Se debe respetar el orden en que se restan las coordenadas de cada punto.

La gráfica de una función lineal es una recta pero que **no toda recta corresponde a la gráfica de una función lineal** como el caso, por ejemplo, de las rectas verticales u horizontales.

Abordaremos nuevamente el concepto de pendiente de una recta, cuando estudiemos el **Punto 4.1 - Tasa de Variación Media** $(\boldsymbol{TVM})$ del Capítulo N°4.

Geométricamente la ordenada al origen representa la ordenada del punto donde la recta interseca al eje de ordenadas $(eje\ y)$. Nos abocaremos ahora, a recordar cómo se realiza el cálculo de la citada intersección y posteriormente analizaremos cómo calcular la intersección de una función lineal con el eje de abscisas $(eje\ x)$.

2.1.2 Intersección con los Ejes Coordenados

Intersección con el eje de ordenadas $(\boldsymbol{eje\ y})$:

En el capítulo anterior hemos definido a la intersección con el eje de ordenadas como el punto de la función que tiene por coordenadas $(0; f(0))$, se obtiene cuando la variable independiente asume el valor $x = 0$, es decir:

$$f(0) = m.0 + b = b$$

Por lo tanto, toda función lineal interseca al eje de ordenadas en el punto $\left(0; f(0)\right) = (0; b)$.

Puedes consultar el tema **Ecuaciones Lineales Con Una Incógnita** en el **Punto 3.1.1 del Capítulo N°0.**

Intersección con el eje de abscisas $(\boldsymbol{eje\ x})$:

Las intersecciones de una función con el eje de abscisas se obtienen buscando las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$, es decir cuando la variable dependiente asume el valor cero $(y = 0)$.

La función lineal cuya expresión algebraica es $f(x) = m.x + b$, con $m \neq 0$, se anula en el punto de coordenadas $\left(-\frac{b}{m}; 0\right)$, dado que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow m.x + b = 0 \Leftrightarrow m.x = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$$

La ecuación lineal que acabamos de resolver tiene solamente una solución real, es por ello que, en el caso de la función lineal, solamente es posible encontrar un único punto de corte con el eje de abscisas.

Identificado el valor del dominio por donde la función lineal interseca al eje de abscisas $\left(x = -\frac{b}{m}\right)$, es factible determinar el intervalo de positividad y el de negatividad de dicha función. También puedes obtenerlos resolviendo las siguientes inecuaciones lineales: **Intervalo de positividad** $(f(x) > 0)$, **Intervalo de Negatividad** $(f(x) < 0)$.

Continuando con el ejemplo presentado al principio del capítulo, calcularemos los parámetros de la función lineal.

Resolución:

Previo a calcular los parámetros de esta función lineal y por consiguiente, a obtener la ecuación de su recta, observemos que al ser el peso (gr) una variable continua que no puede asumir valores negativos, es por ello que el dominio de la función es $Domf = \mathbb{R}^+$. Para encontrar la ecuación de la recta que permite expresar al *precio* ($) de los tomates cherry en función a su *peso* (gr), debemos hallar la pendiente "m" y la ordenada al origen "b" y reemplazarlas en la expresión algebraica: $y = f(x) = m.x + b \quad \mathbf{(1)}$

En primer lugar, vamos a calcular la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Tomamos, por ejemplo, a los pares ordenados $(x_1\,; y_1) = (100\,; 6)$ y $(x_2\,; y_2) = (600\,; 36)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{36 - 6}{600 - 100} = \frac{30}{500} = 0{,}06 \;\therefore\; \boxed{m = 0{,}06}$$

Es posible elegir cualquier combinación de dos pares ordenados para obtener la pendiente "m" (respetando siempre el orden en que se toman los pares dados). Por ser $m > 0$ la función lineal es una función creciente en su dominio de definición ($Domf = \mathbb{R}^+$).

Ahora para obtener la ordenada al origen "b" tomamos cualquier punto de los dados, por ejemplo, el $(600\,; 36)$ y reemplazamos a las coordenas x e y en la fórmula $(\mathbf{1})$:

$$36 = 0{,}06\,.\,600 + b \Leftrightarrow b = 36 - 36 = 0 \;\therefore\; \boxed{b = 0}$$

De este modo la ecuación de la recta es:

$$\boxed{y = 0{,}06\,.\,x + 0 = 0{,}06\,.\,x}$$

2.1.3 Forma Punto – Pendiente De La Ecuación De Una Recta

Si en vez de conocer la pendiente y la ordenada al origen, se conoce la pendiente de la recta "m" y un punto de coordenada $(x_1; y_1)$, es posible hallar la ecuación que representa a la recta. Para obtener la ecuación, tomaremos cualquier otro punto sobre la recta de coordenadas $(x; y)$ y, partiendo de la fórmula de la pendiente con los puntos $(x_1; y_1)$ y $(x; y)$, se obtiene:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow \boxed{y - y_1 = m\,.\,(x - x_1)}$$

Multiplicando ambos miembros por $(x - x_1)$

La ecuación anterior se denomina **Forma Punto – Pendiente de la Recta**.

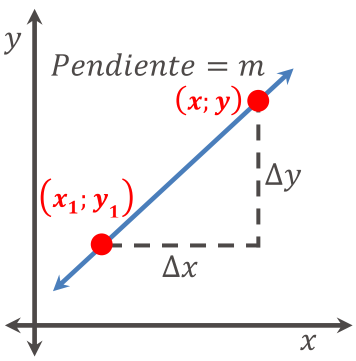


Fig. 28.: Recta que pasa por el punto $(x_1; y_1)$ con pendiente m.

Para el ejemplo presentado, $m = 0{,}06$ y utilizando

La función del ejemplo responde a la forma $y = m.x$ con $m \neq 0$ y $b = 0$. En dicha función, los cambios que experimente la variable independiente **son proporcionales** a los que se dan en la variable dependiente, es decir cuando aumenta o disminuye la variable independiente la variable dependiente lo hace **en la misma proporción y sentido**. En este caso, la función que relaciona a ambas variables se la denomina de **proporcionalidad directa**, y la pendiente "m" es la constante de proporcionalidad directa. Si $b \neq 0$, entonces los cambios experimentados en la variable independiente **no son proporcionales** a los que se producen en la variable dependiente.

cualquier par ordenado de los que disponemos, por ejemplo, el punto $(x_1\ ;\ y_1) = (600\ ;36)$, es posible también calcular la ecuación de la recta utilizando la **Forma Punto – Pendiente**.

Resolución: Reemplazando los datos que disponemos en:

$$y - y_1 = m\,.(x - x_1) \quad (2)$$

$$y - 36 = 0{,}06.(x - 600) \Leftrightarrow y = 0{,}06\,.x - 0{,}06\,.600 + 36 \Leftrightarrow \boxed{y = 0{,}06\,.x}$$

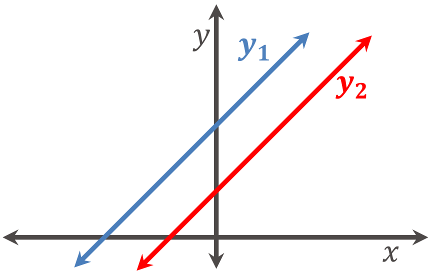
2.1.4 Rectas Paralelas, Coincidentes Y Perpendiculares

Definición de Rectas Paralelas:

Se denomina **Rectas Paralelas** a todas aquellas que posean la misma pendiente y distinta ordenada al origen.

En Símbolos:

Sean $y_1 = m_1.x + b_1$ e $y_2 = m_2.x + b_2$ las ecuaciones de dos rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces **son paralelas** $\Leftrightarrow m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$.



Geométricamente, las rectas paralelas tienen la misma inclinación respecto al $eje\ x$ y no se intersecan en ningún punto.

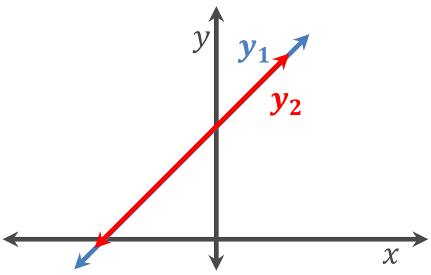
Fig. 29.: Rectas Paralelas

Definición de Rectas Coincidentes:

Se denomina **Rectas Coincidentes** a todas aquellas que se superponen una con otra, es decir que se caracterizan por tener todos sus puntos comunes.

En Símbolos:

Sean $y_1 = m_1.x + b_1$ e $y_2 = m_2.x + b_2$ las ecuaciones de dos rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces **son coincidentes** $\Leftrightarrow m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$.



Geométricamente, las rectas coincidentes tienen la misma inclinación respecto al $eje\ x$ y se intersecan en todos sus puntos.

Fig. 30.: Rectas Coincidentes

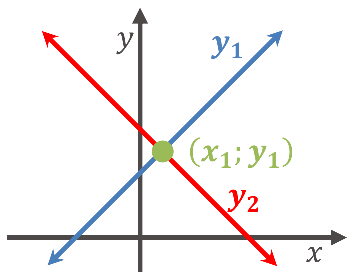
Definición de Rectas Perpendiculares:

Se denomina **Rectas Perpendiculares** a todas aquellas rectas cuyas pendientes son recíprocas y de signo contrario.

En Símbolos:

Sean $y_1 = m_1.x + b_1$ e $y_2 = m_2.x + b_2$ las ecuaciones de dos rectas con pendiente m_1 y m_2 respectivamente y distintas a cero ($m_1 \neq 0$ y $m_2 \neq 0$), entonces **son perpendiculares** $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Para obtener el recíproco de un número, sólo se divide a 1 por el número. Por ejemplo, el recíproco de 2 es $\frac{1}{2}$. Todo número tiene un recíproco excepto el 0 ($\frac{1}{0}$ No está definido como operación aritmética, luego se ampliará este tema en el Capítulo N° 3).



Geométricamente, en el sistema de coordenadas cartesianas las rectas perpendiculares forman 4 ángulos rectos.

Fig. 31.: Rectas Perpendiculares

¿Cuál sería la recta perpendicular a una recta de ecuación $y = k.x$ con $k \neq 0$?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Determina si la recta que pasa por los puntos $(1;3)$ y $(2;6)$ y la recta $y = -\frac{1}{3}x + 5$ son paralelas o perpendiculares.

Resolución:

La pendiente de la recta que pasa por los puntos dados es:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-(1)} = \frac{3}{1} = 3$$

Puesto que la recta que pasa por los puntos dados tiene pendiente $m_1 = 3$, recíproca y opuesta (de signo contrario) a la pendiente de la recta $y = -\frac{1}{3}x + 5$, concluimos que las rectas son perpendiculares.

Es importante que adviertas que no fue necesario calcular la ordenada al origen para poder concluir que ambas rectas son perpendiculares.

Como cierre de la sección Funciones Lineales, te proponemos que completes el siguiente mapa conceptual:

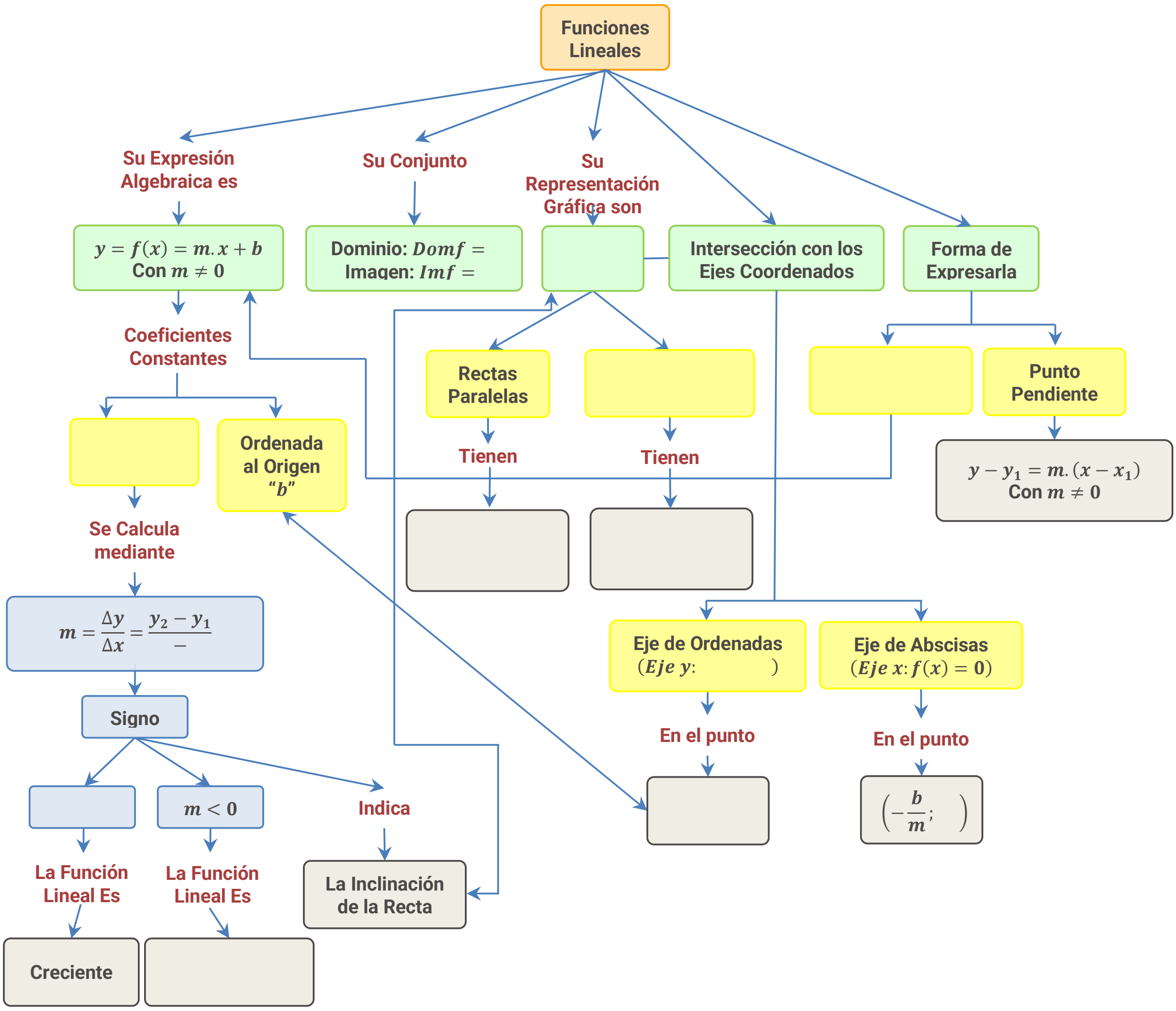


Fig. 32.: Mapa Conceptual Funciones Lineales

2.1.5 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 1: Encuentra la expresión analítica que representa a la función lineal que:

$i)$	Pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$	$v)$	Tiene pendiente 5 y su intersección con el eje de ordenadas es en $y = 7$
$ii)$	Pasa por los puntos $f(-4) = 2$ y $f(2) = -1$	$vi)$	Interseca al eje de abscisas en $x = 4$ y al de ordenadas en $y = 2$
$iii)$	Pasa por el punto $(-1; 7)$ y tiene pendiente 5	$vii)$	Es paralela a $g(x) = 8x + 5$ y pasa por el punto $(1; 4)$
$iv)$	Pasa por el origen el sistema de coordenadas cartesianas y $m = 4$	$viii)$	Es perpendicular a la recta $y = -2x$ y pasa por el punto $(2; -1)$

Luego grafica las funciones halladas en cada inciso.

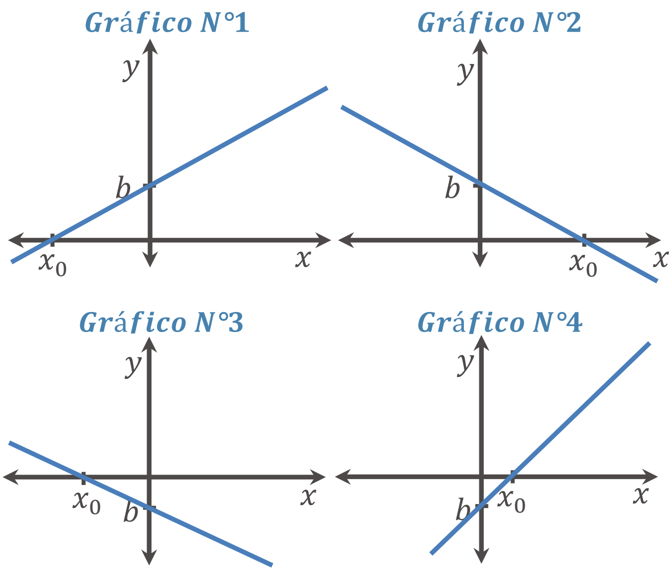
ACTIVIDAD 2: A partir de la expresión analítica de las siguientes funciones lineales, se te solicita que:

a) Asocies cada ecuación con la recta que más se parece a su gráfica.

b) Identifiques las coordenadas de los puntos notables correspondientes a cada gráfica.

c) Determines analíticamente el intervalo de positividad y el intervalo de negatividad de cada función.

$i)$	$f(x) = 6x + 4$	$iii)$	$f(x) = 6x - 4$
$ii)$	$f(x) = -6x + 4$	$iv)$	$f(x) = -6x - 4$



2.2 Funciones Constantes

En una visita a una bodega de la provincia de San Juan, el enólogo responsable del control de calidad de la firma recomendó que la conservación del stock de vinos producidos debe realizarse en espacio donde no haya oscilaciones térmicas y con una temperatura cercana a los 17°. Se presenta a continuación la gráfica de la temperatura observada durante los días de verano de un tipo especial de un vino tinto de reserva y gran reserva:

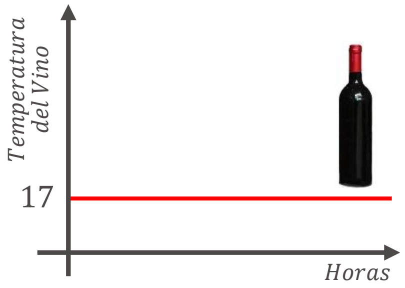


Fig. 33.: Temperatura del vino a lo largo de las horas

Definición:

Se denomina **Función Constante** a toda función cuya expresión algebraica es un polinomio de grado cero, es decir:

$$\boldsymbol{y = f(x) = b}$$

En donde $\boldsymbol{b}$ es cualquier valor real.

El Dominio de definición de una función constante es el conjunto de los Números Reales y se denota por $Domf = \mathbb{R}$. La Imagen de una función constante es el conjunto unitario, cuyo elemento es la constante b y se denota por $Im\ f = \{b\}$.

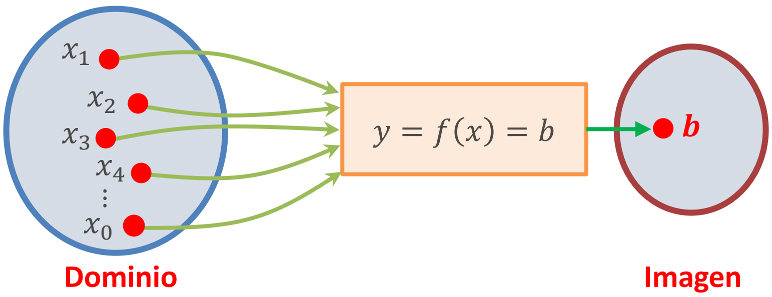


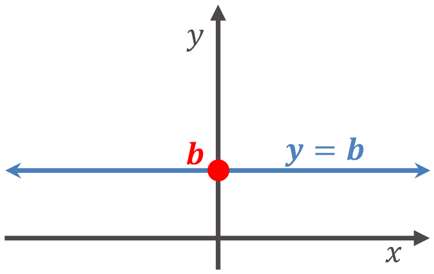
Fig. 34.: Diagrama de una Relación Funcional Constante

Definición de Recta Horizontal:

Se denomina **Recta Horizontal** a toda recta en la cual, sin importar el valor que asuma la variable independiente (x), la imagen $f(x)$ no se modifica, es decir se mantiene su valor.

Todo punto que pertenezca a la recta tiene por coordenada $(x; b)$ y su representación gráfica viene dada por la siguiente figura:

La función constante es aquella en la que para cualquier valor de la variable independiente (x), la variable dependiente $(f(x))$ no cambia, es decir, permanece constante.



Geométricamente, las rectas horizontales son rectas paralelas al eje de abscisas y perpendiculares al eje de ordenadas.

Fig. 35.: Recta Horizontal

La representación gráfica de las Funciones Constantes es una recta horizontal cuya ecuación es $\boldsymbol{y = b}$.

Antes de continuar con la lectura, ¿puedes calcular el valor que asume la pendiente de una recta horizontal?

....

....

....

Por ser $m = 0$, las funciones en estudio no crecen ni decrecen en su dominio, simplemente permanecen constantes.

Toda función constante presenta un Ritmo de Cambio Nulo ante cambios de la variable independiente (x).

Calcula la expresión analítica de la recta que pasa por los puntos $(-3; 7)$ y $(5; 7)$.

Resolución: Previo a calcular los coeficientes constantes "m" y "b", es posible advertir que ambos puntos presentan el mismo valor de ordenada, es por ello que $\Delta y = y_2 - y_1 = 7 - 7 = 0$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos dados es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-7}{5-(-3)} = \frac{0}{8} = 0$$

Luego $y = 0.x + b$, ahora reemplazamos x e y por las coordenadas de cualquier punto dado:

$$7 = 0.(-3) + b \Leftrightarrow b = 7 \therefore \boxed{y = 7}$$

2.2.1 El Caso de las Rectas Verticales o Paralelas al Eje de Ordenadas

Definición de Recta Vertical:

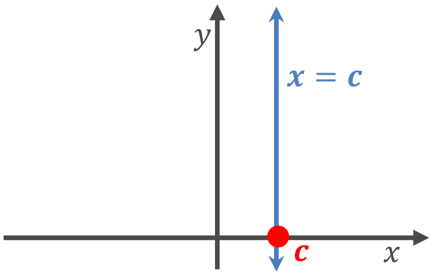
Se denomina **Recta Vertical** a toda recta conformada por puntos (x, y) con el mismo valor de abscisa (x). Así, la ecuación de una recta vertical que pasa por $(c; y)$ es $x = c$, cualquiera sea el valor que asuma la variable dependiente (y).

Los pares ordenados (x, y) que pertenecen a la representación gráfica de la **función constante**, tienen por segunda coordenada el mismo valor de ordenada. Así, los puntos con coordenadas (x, b) representan a todos los pares ordenadados para los que la función constante asume el valor $y = b$, cualquiera sea el valor que asuma la variable independiente (x).

Cuando abordemos el tema **"Análisis Diferencial"** (Capítulo N°5) serás capaz de justificar esta afirmación.

Las rectas verticales $x = c$ (con $c \neq 0$), no intersecan al eje de ordenadas $(eje\ y)$ y son paralelas a éste.
Si $c = 0$ la recta $x = 0$ coincide directamente con el eje de ordenadas.

Su ecuación es de la forma $\boldsymbol{x = c}$ y su representación gráfica viene dada por la siguiente figura:



Geométricamente, las rectas verticales son rectas paralelas al eje de ordenadas y presentan la misma coordenada de abscisas para todo punto que pertenece a la recta.

Fig. 36.: Recta Vertical

Antes de realizar el abordaje del próximo punto, nos interesa que justifiques la siguiente afirmación:

"Toda recta vertical no representa a una Función"

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

¿Por qué una recta vertical no puede escribirse bajo la forma pendiente-intersección? (Recuerda que la ecuación por la que se representa a la Función Lineal en el **punto 2.1 "Funciones Lineales"**, se denomina Forma Pendiente-Intersección de la Recta).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Calcula la expresión analítica de la recta que pasa por los puntos $(-2; 2)$ y $(-2; 6)$.

Resolución: Previo a intentar calcular los coeficientes constantes "m" y "b", es posible advertir que ambos puntos presentan el mismo valor de abscisas, es por ello que $\Delta x = x_2 - x_1 = -2 - (-2) = 0$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos dados *no está definida* ya que no es posible realizar la división por cero como operación aritmética:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 2}{-2 - (-2)} = \frac{4}{0}\ No\ está\ definida$$

La ordenada al origen "b" tampoco está definida ya que al ser la recta vertical paralela al eje de ordenadas $(eje\ y)$, no corta a dicho eje.

Concluimos entonces que la ecuación que representa a la recta vertical es $\boxed{x=-2}$.

Como cierre de la sección funciones constantes y rectas verticales, te proponemos que realices un mapa conceptual.

Puedes realizar el mapa conceptual mediante la aplicación *Cmap Tools* . Para aprender a utilizar el software te proponemos que veas el siguiente *video*.

2.2.2 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 3: Encuentra la expresión analítica que representa a la función que:

$i)$ Pasa por los puntos $(0;4)$ y $(2;4)$.

$ii)$ Pasa por el punto $(1;1)$ y es paralela al eje de abscisas.

$iii)$ Pasa por el punto $(-6;-6)$ y es horizontal.

$iv)$ *Pasa por el origen y es* horizontal.

Luego, se te solicita que:

a) Realices su gráfica identificando, en caso de ser posible, puntos notables y signos de sus coeficientes constantes.

b) Determines Dominio e Imagen.

c) Identifiques, en caso de ser posible, los intervalos del dominio de f para los cuales la función es positiva, negativa o nula.

ACTIVIDAD 4: Encuentra la ecuación de una recta que:

$i)$ Pasa por el punto $(2;4)$ y es vertical.

$ii)$ Pasa por el origen y es vertical.

2.3 Aplicaciones Económicas de las Funciones Lineales y Constantes

Las funciones lineales y constantes se aplican a diversas situaciones que se presentan en la vida real. En esta sección estudiaremos algunas de las aplicaciones más importantes en las ciencias económicas de este tipo de funciones, cuando se analizan los costos, ingresos y beneficios de una empresa o las cantidades demandadas y ofrecidas de productos en el mercado.

2.3.1 El Modelo de Costos, Ingresos y Beneficios

La Función de Costo Total

Toda empresa está interesada en sus costos, debido a que ellos reflejan las erogaciones de dinero que debe desembolsar para hacer frente a las obligaciones contraídas. Estos flujos de dinero pueden ser muy variados y atienden a las diferentes necesidades que la empresa posee, por ejemplo, el pago de salarios, de servicios, de la mercadería o materia prima, que se necesita para poder producir o vender los productos, etc.

Si se considera que el **Costo Total** se obtiene de la suma de dos componentes: el **Costo Variable** y el **Costo Fijo.** La expresión de dicho costo es:

$$\boxed{\boldsymbol{CT(x) = Costos\ Variables + Costos\ Fijos = CV(x) + CF}}$$

En una empresa que produce bienes, los **Costos Variables** se denominan así pues su valor está directamente relacionado con el número de unidades que se fabrican (volumen de producción), pero si en vez de producir, la empresa se dedica a la compra de bienes para su posterior comercialización, estos costos dependerán del número de unidades que se compren (volumen de compra).En un escenario de producción, el costo variable por unidad se compone por lo general de los costos de materia prima, la mano de obra (trabajo) y los costos indirectos de fabricación (CIF). Los **Costos Variables**, se obtienen haciendo el producto entre el Costo Variable por unidad producida $(CV\ Unitario)$, multiplicado por el número de unidades producidas (x):

$$\boxed{\boldsymbol{CV(x) = (CV\ Unitario).x}}$$

En un escenario de compra, el **Costo Variable** depende del precio de la mercadería comprada y se obtiene como el producto de éste $(CV\ Unitario)$ multiplicado por el número de unidades compradas (x).

Por su parte, los **Costos Fijos** son independiente de la cantidad de artículos que se fabriquen o mercaderías que se compren.

Es importante advertir que cuando la empresa no ha empezado

Debe tenerse presente, que las cantidades, el ingreso y el costo por venta no tienen sentido frente a valores negativos de la variable independiente, es por ello que las curvas de Ingresos y Costos se limitan al primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas.

a producir/comprar unidades $(x = 0)$, debe afrontar el pago de sus Costos Fijos $(CT(0) = CF)$. A partir de allí, para obtener el Costo Total, se le debe adicionar al Costo Fijo el Costo Variable.

Antes de continuar con la lectura, ¿podrían dar ejemplos de Costos Variables, Costos Fijos y CIF?

....

....

....

Las funciones que se estudian en este apartado, pueden ser expresadas en diferentes unidades de medidas, como por ejemplo, pesos argentinos ($\$$), dólares ($U\$S$), etc. En el caso de que no se especifique cuál es la unidad de medida, diremos que están expresadas en **"Unidades Monetarias"**.

De la manera presentada, tanto la función de Costo Variable, como la función Costo Total son funciones lineales, pero la función de Costos Fijos responde a la forma de una función constante. En la Fig. 37 se representa la gráfica de las funciones bajo estudio.

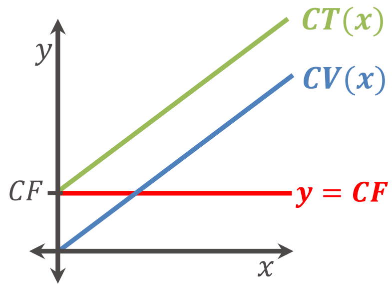


Fig. 37.: Representación Gráfica de la función de $CT(x)$

La Función de Ingreso Total

El dinero que la empresa recibe como resultado de la venta de productos o por la prestación de servicios que realiza se denomina **ingreso**. En general, si la función de **Ingreso Total** responde a la estructura de una función lineal, podemos expresarla algebraicamente como el producto entre el precio unitario de venta del artículo/prestación de servicio $(PV\ Unitario)$, multiplicado por la cantidad de unidades vendidas/servicios prestados (x).

$$\boxed{\boldsymbol{IT(x) = (PV\ Unitario).x}}$$

La siguiente figura representa la gráfica de la función de Ingreso Total:

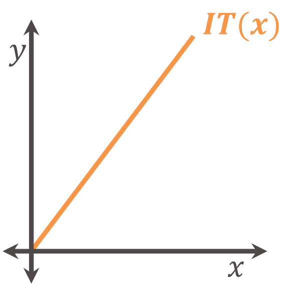


Fig. 38.: Representación Gráfica de la función de $IT(x)$

La Función de Beneficio Total

La **ganancia** o **pérdida** que tiene una empresa por la venta de x cantidad de unidades de un producto o por la prestación de x servicios, viene dada por la función de **Beneficio Total** $(B(x))$. Para calcularla, debemos realizar la diferencia entre la función de **Ingreso Total** $(IT(x))$ y la función de **Costo Total** $(CT(x))$:

$$\boxed{\boldsymbol{B(x) = IT(x) - CT(x)}}$$

Cuando el ingreso y el costo son funciones lineales de la misma variable, la función de beneficio es una función lineal de la misma variable.

Cuando el ingreso total excede al costo total, el beneficio es positivo; en este caso suele decirse que el beneficio de la empresa representa una **ganancia neta** o **utilidad neta**. Cuando el costo total excede al ingreso total, el beneficio es negativo; en tales casos, suele decirse que la empresa tiene **pérdida** o **déficit**.

Ahora bien, ¿qué sucede si los ingresos son iguales a los costos?, en este caso la empresa no tiene ni ganancias ni pérdidas, es por ello que se suele decir que está en **equilibrio**. A este equilibrio se lo denomina **Beneficio Nulo**, y se lo obtiene igualando la función de **Ingreso Total** a la de **Costo Total** y determinando el punto en el que el nivel de ventas hace que el ingreso de dinero de la empresa sea igual al egreso de dinero. Matemáticamente estamos buscando aquel valor $x = x_0$ que hace que $I(x_0) = C(x_0)$. Alternativamente, el mismo punto se puede calcular igualando a cero la función de **Beneficio**.

Punto de Beneficio Nulo	
$\boldsymbol{IT(x) = CT(x)}$	$\boldsymbol{B(x) = IT(x) - CT(x) = 0}$

Tabla N°8

En el caso de trabajar con la Función Beneficio $(B(x))$ y a diferencia de lo que sucedía con la función de Ingresos y Costos, el análisis ya no lo limitaremos al primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas, sino que lo extenderemos al primer y cuarto cuadrante.

La siguiente figura representa la gráfica de la función bajo estudio.

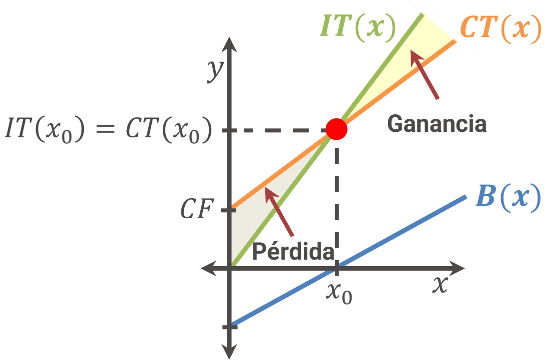


Fig. 39.: Representación Gráfica de la Función de Beneficio

Por último, si quisieras calcular el intervalo del dominio donde la empresa obtiene **ganancia**, puedes resolver la inecuación $IT(x) > CT(x)$ o en su defecto trabajar con el intervalo de positividad de

la función **Beneficio** $(B(x) > 0)$. En el caso de querer calcular el intervalo del dominio donde la empresa obtiene **pérdidas**, puedes resolver la inecuación $IT(x) < CT(x)$ o en su defecto trabajar con el intervalo de negatividad de la función **Beneficio** $(B(x) < 0)$.

Ganancia	Pérdida
$IT(x) > CT(x)$ $B(x) > 0$	$IT(x) < CT(x)$ $B(x) < 0$

Tabla N°9

Puedes consultar el tema **Interpretación de Gráficas** en el **Punto 1.3.3** del **Capítulo N°1.**

2.3.2 El Modelo de Mercado (Oferta y Demanda)

¿Cuándo surge la economía de mercado?

El comercio existe desde que surgió la civilización, el **capitalismo** como **sistema económico** no aparece hasta el siglo XVI, dando lugar a una nueva forma de comerciar denominada mercantilismo. Su máximo desarrollo se alcanza en Inglaterra y Francia, en donde el Gobierno ejercía el control de la producción y el consumo.

Más adelante, dos acontecimientos propician la fundación del **capitalismo moderno**, en la segunda mitad del siglo $XVIII$: la presentación en Francia de los fisiócratas y la publicación de las ideas de Adam Smith**,** apuestan por un orden económico alejado de la intervención del Estado, favoreciendo el inicio de la **Revolución Industrial**, la cual logró su mayor apogeo en el siglo XIX. En este mismo siglo, la **Revolución Francesa**, marco el final definitivo del feudalismo, lo que significó el tránsito de la sociedad estamental a la **sociedad capitalista**, basada en una **economía de mercado**.

¿Cómo funcionan los mercados?

Conceptos como **Oferta** y **Demanda** son dos palabras que en Ciencias Económicas son muy utilizadas, pues son las fuerzas que, al interactuar, hacen que las economías de mercado funcionen. De esta interacción se determina la cantidad que se produce de cada bien y/o servicio, como así también el precio al que debe venderse.

Un **mercado** es toda institución social en la que se intercambian bienes y servicios, así como los factores productivos.

El intercambio que se produce en el mercado es indirecto debido a la existencia del dinero. Un bien o servicio se cambia por dinero y este, posteriormente, por otros bienes o servicios.

Los **agentes económicos (familias, empresas y Estado)** son los principales actores que toman decisiones en un mercado, es decir, que intervienen en todos los procesos que tengan relación con la producción, la distribución y el consumo de productos y/o servicios.
El concepto fue creado por los economistas con la intención de simplificar los procesos económicos y explicarlos de una manera más sencilla.

Cuando en el intercambio se utiliza el dinero, existen dos tipos de agentes bien diferenciados: los **compradores** y los **vendedores**.

Es posible identificar dos tipos de mercado, el de bienes y el de factores productivos. El *mercado de bienes* es aquél en donde se compran bienes o servicios, y sus agentes se denominan consumidores o compradores y productores. Por ejemplo, cuando deseamos adquirir un automóvil y nos informamos sobre los modelos, su disponibilidad y el precio que existe en las diferentes concesionarias, actuamos como un comprador típico.

El *mercado de factores* es aquél en que se compran y venden factores de la producción (tierra, trabajo o capital). Por ejemplo, cuando una persona busca trabajo, consultando las demandas de empleo que publican los periódicos, actúa como oferente o vendedor de su trabajo.

La Función de Demanda

La cantidad demandada de un producto se relaciona directamente con su precio. La **Ley de Demanda** indica que la cantidad demandada aumenta a medida que el precio disminuye y disminuye conforme el precio se incrementa, es por ello que la cantidad demandada se determina en función al precio.

Es importante destacar que la cantidad demandada de un producto puede depender de otros determinantes tales como el gusto o el ingreso de los compradores, el precio de otros productos, etc.

Una **Función de Demanda** expresa el modo en que varía la cantidad demandada de un artículo con relación al precio que se cobra por el mismo. Su expresión algebraica es:

$$D(p) = q$$

Siendo "p" el precio del producto y "q" la cantidad demandada.

A pesar de ser el precio la variable independiente, los profesionales en ciencias económicas grafican a la cantidad (q) en el eje de abscisas y al precio (p) en el eje de ordenadas; es decir que grafican a la función $p = D(q)$.

La siguiente figura muestra el comportamiento gráfico de una Función de Demanda:

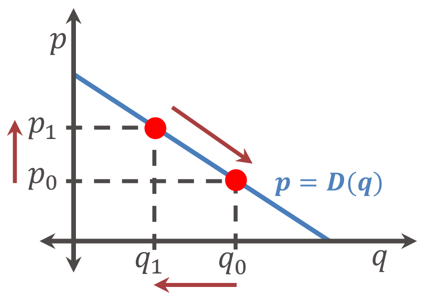


Fig. 40.: Representación Gráfica de una Función de Demanda

La Función de Oferta

Como respuesta a las necesidades de los consumidores, existe una cantidad correspondiente de productos (bienes o servicios) que los fabricantes están dispuestos a vender en el mercado.

Al igual que la demanda, el precio al que están dispuestos a ofrecer una cantidad determina de artículos constituye su oferta. La **Ley de Oferta**, indica que, a mayor precio, mayor cantidad ofrecida y viceversa, es por ello que la cantidad ofrecida se determina también en función al precio.

Nuevamente es importante destacar que la cantidad ofrecida de un producto puede depender de otros determinantes tales como el nivel de tecnología existente, el precio de las materias primas o la mano de obra, el precio de otros productos, etc.

De igual manera que sucede con la demanda, para el caso de la Función de Oferta graficaremos a la variable precio (p) en el eje de ordenadas y a la cantidad (q) en el de abscisas, es decir que graficaremos funciones de oferta de la forma $p = O(q)$.

Una **Función de Oferta** indica el número de unidades de un producto que los proveedores quieren llevar al mercado en relación al precio que los consumidores están dispuestos a pagar. Su expresión algebraica es:

$$O(p) = q$$

Siendo "p" el precio del producto y "q" la cantidad ofrecida.

La siguiente figura muestra el comportamiento gráfico de una Función de Oferta:

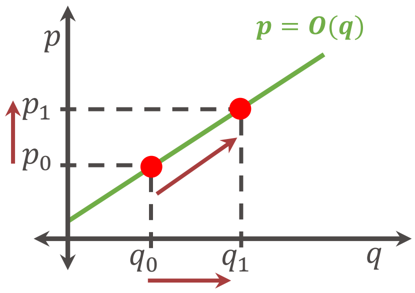


Fig. 41.: Representación Gráfica de una Función de Oferta

Más adelante observaremos que el comportamiento de las funciones de demanda y oferta no necesariamente tiene que responder a una representación lineal, en ese caso simplemente diremos que las curvas de demanda son decrecientes y que las de oferta son crecientes.

Hay que recordar que, si la expresión algebraica que representa a una función de demanda responde a la estructura de una función lineal, su pendiente será negativa ya que la relación entre el precio y la cantidad demandada es **inversa**. En cambio, la función de oferta lineal siempre tiene pendiente positiva ya que la relación entre el precio y la cantidad ofertada es **directa**.

Luego de haber analizado las características que presentan la función de oferta y la de demanda, te proponemos responder a los siguientes interrogantes. ¿Cuál es el dominio restringido de una función de demanda y cuál el de una función de oferta?, ¿Qué significado tendrán las intersecciones con los ejes coordenados de la función demanda y de la función oferta?

………

………

……

Tomando en consideración que a efectos de esta asignatura trabajaremos con una función de oferta $\left(p = O(q)\right)$ y una función de demanda $\left(p = D(q)\right)$, entonces diremos que ambas funciones son iguales en aquel nivel de precio donde se ofrecen y demandan la misma cantidad de artículos. La cantidad que surge de este precio se la denomina **cantidad de equilibrio de mercado** $(\boldsymbol{q_e})$ y se obtiene calculando aquel valor de abscisa que hace que la oferta iguale a la de demanda.

Una vez determinada la cantidad de equilibrio de mercado, para obtener el **precio de equilibrio de mercado** $(\boldsymbol{p_e})$, debemos reemplazar a q_e en la función de oferta $\left(p_e = O(q_e)\right)$ o en la de demanda $\left(p_e = D(q_e)\right)$. De esta manera se obtiene el **punto de equilibrio de mercado**:

El **Punto de Equilibrio de Mercado** económicamente representa aquel precio al que los consumidores comprarán la misma cantidad de producto que los fabricantes estén dispuestos a vender. Es decir, si $p = O(q)$ y $p = D(q)$ son las funciones de oferta y demanda respectivamente, entonces el punto $(q_e; p_e)$ se denomina: punto de equilibrio de mercado.

Puedes consultar este tema en el **Punto 3.2 del Capítulo N°0.**

Analíticamente, dada las ecuaciones lineales de oferta y demanda, se puede formar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas y luego lo resuelves por cualquiera de los métodos que hemos estudiado en el cursillo de ingreso.

$$\begin{cases} p = O(q) \\ p = D(q) \end{cases} \Rightarrow O(q) = D(q) \Leftrightarrow q = q_e$$

Luego calculamos $p_e = O(q_e)$ ó $p_e = D(q_e)$.

En la siguiente figura se presenta al punto de equilibrio de mercado:

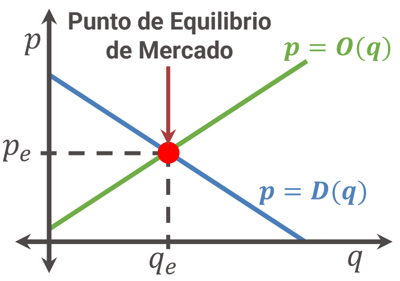


Fig. 42.: Representación Gráfica de una Función de Oferta y Demanda

Cuando en el mercado se ofrecen y demandan la misma cantidad de artículos, se dice que está en equilibrio. Ahora bien, a un precio dado, se dice que habrá ***escasez*** de productos en el mercado cuando la cantidad demandada supere a la cantidad ofrecida. Por el contrario, a un nivel de precio dado, existirá ***excedente*** del producto cuando la cantidad ofrecida supere a la cantidad demandada.

Luego de haber realizado las actividades prácticas correspondientes a esta sección, te proponemos que escribas el procedimiento para calcular analíticamente el excedente o la escasez de productos en el mercado. Adicionalmente, utiliza la Fig. 42 para representar ambas zonas.

………

………

………………………………………………………………………………………………………

Como cierre de la sección aplicaciones económicas de las funciones lineales y constantes, te proponemos que realices un mapa conceptual:

CmapTools

Puedes realizar el mapa conceptual mediante la aplicación *Cmap Tools* .

2.3.3 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 5: Techno SA. es una empresa dedicada a la producción y venta de parlantes. Está interesada en abrir una nueva fábrica donde solamente produciría su modelo con conectividad bluetooth y cuya capacidad máxima es de 500 unidades mensuales. El costo mensual de fabricación de estos parlantes viene dado por la ecuación $C(x) = 4000x + 600000$. Además, la empresa los puede vender a $\$6000$ cada uno.

Se te solicita que:

- **a)** Indiques el intervalo de unidades a producir y vender para el cual tiene sentido el análisis.
- **b)** Grafiques la situación bajo estudio en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.
- **c)** Determines aquel nivel de producción y venta en el que la empresa no tiene ni ganancias ni pérdidas.
- **d)** Halles el intervalo para el cual la empresa obtiene ganancias.

ACTIVIDAD 6: Una empresa que produce celulares con sistema operativo Android, determina que el costo de producción para 1000 celulares es de $295000\ U\$S$ y que el ritmo al que crece el costo es constante e igual a $170\ U\$S$.

Con la información disponible, se te solicita que:

- **a)** Determines el valor al que ascienden los costos fijos.
- **b)** Grafiques las funciones de Costo Variable, Costo Fijo y Costo Total en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

ACTIVIDAD 7: Un empresario está analizando la posibilidad de comprar a su proveedor un componente necesario para la elaboración de sus productos a $\$9{,}50$ por unidad de componente o alquilar un equipo por $\$60000$ y fabricar el componente a un costo de $\$7$ por unidad.

Con la información disponible, se te solicita que:

- **a)** Determines cuáles son las alternativas de decisión que se plantea en la actividad.
- **b)** Determines el número de unidades del componente que hacen que ambas decisiones sean equivalentes.
- **c)** Identifiques la alternativa más conveniente si se requieren 15000 unidades de ese componente. Luego indica el costo de esa alternativa.
- **d)** Determines cuál es la alternativa más conveniente para la elaboración de sus productos, si el costo es de $\$250000$.

ACTIVIDAD 8: Depreciación lineal de bienes de uso. Una empresa ha comprado una computadora de última generación por $\$55000$. Se espera que su tiempo de vida útil sea de 5 años, no existiendo posibilidad de venta al finalizar la misma. Además, la empresa quiere mantener constante la tasa de depreciación de la computadora en todos los períodos.

Con la información disponible, se te solicita que:

a) Determines el dominio de definición de la situación en estudio.
b) Determines el monto de depreciación anual (MDA).
c) Investigues qué se entiende por *"valor de libro"* de un bien de uso.
d) Escribas la ecuación que permita representar el "*valor de libro*" de la computadora en función al tiempo.
e) Grafiques las función bajo estudio.

En contabilidad se denomina **bienes de uso** a aquellos tangibles destinados a ser utilizados en la actividad principal del ente y no a la venta habitual, incluyendo a los que están en construcción, transito o montaje y los anticipos a proveedores por compras de estos bienes (RT N°9 - Federación Argentina de Consejos Profesionales de Ciencias Económicas - FACPCE).

ACTIVIDAD 9: Depreciación lineal de bienes de uso con valor de recupero. Supone que la empresa de la Actividad 8, puede revender la computadora en $\$6500$ al cabo de los 5 años de vida útil.

Con la información disponible, se te solicita que:

a) Determines el dominio de definición de la situación en estudio.
b) Determines el nuevo monto de depreciación anual, considerando el "*valor de recupero*". Para ello investiga qué se entiende por "*valor de recupero*" y cómo se calcula la depreciación.
c) Escribas la ecuación que permita representar el "*valor de libro*" de la computadora en función al tiempo.
d) Grafiques la función bajo estudio en el mismo sistema de coordenadas cartesianas de la actividad anterior.

Se denomina **depreciación** al reflejo o expresión contable de la disminución de valor a la que se encuentran sometidos ciertos activos como consecuencia de diversos factores tales como su uso normal, envejecimiento (técnico o económico), agotamiento, etc.

ACTIVIDAD 10: Supone que la demanda de la aspiradora robot "Smart Talk Mini" viene dada por la ecuación $p = D(q) = -\frac{1}{90}.q + 24$ y su oferta por la ecuación $p = O(q) = \frac{1}{150}.q + 16$.

Se te solicita que:

a) Calcules e interpretes los puntos donde la cantidad demandada interseca a los ejes coordenados.
b) Encuentres la cantidad de aspiradoras robot ofrecidas para un precio de $\$20$.
c) Determines e interpretes el punto de equilibrio de mercado entre la cantidad ofrecida y demandada.
d) Grafiques las funciones de Oferta y Demanda en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.
e) Determines analítica y gráficamente si para un precio de $\$22$ y de $\$17$, respectivamente, existe excedente o escasez de aspiradoras en el mercado.

2.4 Funciones Cuadráticas

Hasta aquí hemos venido trabajando con situaciones económicas que admiten una representación lineal, sin embargo, existen fenómenos que no se comportan como una función lineal o constante.

Se les presenta ahora una colección de puntos que representan las importaciones diarias de petróleo realizadas por un país y tres posibles relaciones funcionales que permiten modelar la situación bajo estudio:

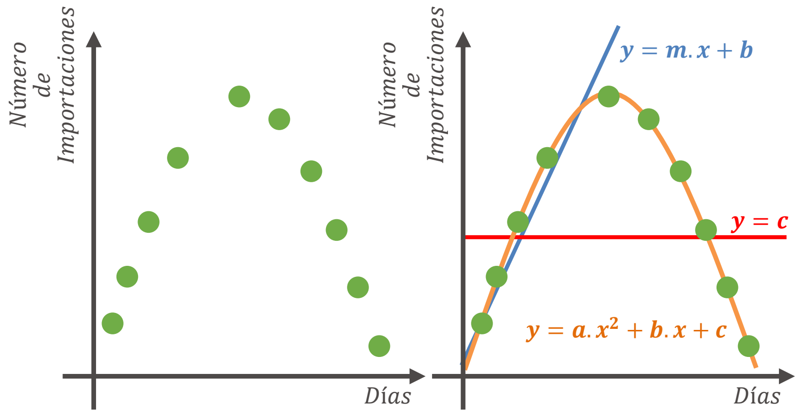


Fig. 43.: Importaciones diarias entre dos países

En esta sección estudiarás las particularidades que caracterizan a las **funciones cuadráticas**, que es el tipo de función que mejor representa la colección de datos que origina el gráfico de la figura precedente.

Definición:

Se denomina **Función Cuadrática** a toda función cuya expresión algebraica es un polinomio de segundo grado, es decir:

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

En donde a, b y c son valores reales y $a \neq 0$. El coeficiente constante a se denomina *coeficiente del término cuadrático*, el parámetro b *coeficiente del término lineal* y c *término independiente*.

La razón por la que el coeficiente del término cuadrático "a" no puede ser igual a cero, es porque si eso sucede, la ecuación se transforma en $y = b.x + c$ que es una función lineal, si $b \neq 0$ o constante, si $b = 0$.

El dominio de definición de una función cuadrática es el conjunto de los números reales y se denota por $Domf = \mathbb{R}$. Para poder determinar la imagen de una función cuadrática deberemos avanzar en el estudio de la temática y analizar lo que sucede con dos conceptos importantes, la orientación de las ramas y la ubicación del vértice.

Su representación gráfica es una **parábola**. A continuación se presentan las gráficas de dos funciones cuadráticas:

$$\boldsymbol{f(x) = a.x^2 + b.x + c}$$

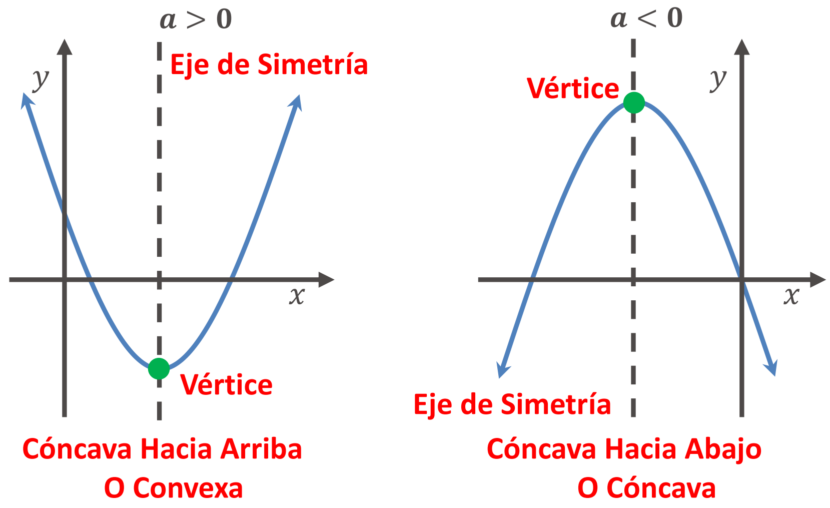


Fig. 44.: Función Cuadrática con $a > 0$ y $a < 0$

Las parábolas son simétricas con respecto a una recta vertical, denominada **eje de simetría de la parábola**. El eje no forma parte de la parábola, pero es un auxiliar útil para trazar su gráfico.

Por ser una recta vertical, la ecuación del eje de simetría es:

$$x = x_v = -\frac{b}{2.a}$$

La intersección de la parábola con su eje de simetría se llama **vértice** $V = (x_v; y_v)$ y sus coordenadas las obtendremos calculando:

$$V = (x_v; y_v) = \left(-\frac{b}{2.a}; f\left(-\frac{b}{2.a}\right)\right)$$

El valor x_v se denomina abscisa del vértice e y_v ordenada del vértice.

Retomaremos el concepto de concavidad y convexidad cuando abordemos en el Capítulo N°5 el **Punto 5.5 "Concavidad y Convexidad"**.

Si en una función cuadrática el coeficiente del término lineal "b" o el término independiente "c" o ambos son cero, la función se denomina cuadrática de forma incompleta. Son ejemplos: $h(x) = x^2$, $m(x) = -x^2 + 10x$, etc.

Analizaremos ahora los coeficientes constantes de la función cuadrática y el comportamiento gráfico que la parábola presenta según los signos que asumen los parámetros.

2.4.1 Análisis de los Coeficientes Constantes de las Funciones Cuadráticas

Empezaremos realizando el análisis del coeficiente del término cuadrático, es decir el coeficiente constante $\boldsymbol{a}$.

El signo de $\boldsymbol{a}$ indica la **orientación de las ramas** de la parábola. Si el signo de $\boldsymbol{a}$ es positivo, $a > 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba (*Convexa*) y si $\boldsymbol{a}$ es negativo, $a < 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia abajo (*Cóncava*). La Fig. 44 permite observar el comportamiento gráfico de dos parábolas donde el signo de $\boldsymbol{a}$ es opuesto. Cabe destacar que si $a > 0$ la función presenta un mínimo en su vértice y si $a < 0$ un máximo en el vértice.

El signo de $\boldsymbol{b}$ indica si la parábola presenta **desplazamiento respecto del eje de ordenadas**, pero por si solo no informa hacia dónde se ha desplazado, ni la cantidad de unidades que lo ha hecho.

Para poder analizar si una función cuadrática se ha desplazado horizontalmente hacia la izquierda o hacia la derecha, debe calcularse la abscisa del vértice "x_v", generando la necesidad de observar tanto el signo de b como el signo de a. En el siguiente cuadro se presentan las diferentes alternativas que pueden ocurrir:

Analizaremos el desplazamiento horizontal y el vertical de la función cuadrática, a partir de la función elemental:
$f(x) = x^2$

	Si $b = 0$	Si $b > 0$	Si $b < 0$
Si $a > 0$	$x_v = \frac{0}{2.a} = 0$ No presenta desplazamiento horizontal	$x_v < 0$ Desplazamiento x_v unidades hacia la izquierda	$x_v > 0$ Desplazamiento x_v unidades hacia la derecha
Si $a < 0$	$x_v = \frac{0}{2.a} = 0$ No presenta desplazamiento horizontal	$x_v > 0$ Desplazamiento x_v unidades hacia la derecha	$x_v < 0$ Desplazamiento x_v unidades hacia la izquierda

Tabla N°10

En la Fig. 45, se presenta la gráfica de dos funciones con ramas orientadas hacia arriba $(a > 0)$ y coeficiente lineal $b = 0$ o $b \neq 0$:

$$\boldsymbol{f(x) = a.x^2 + b.x + c}$$

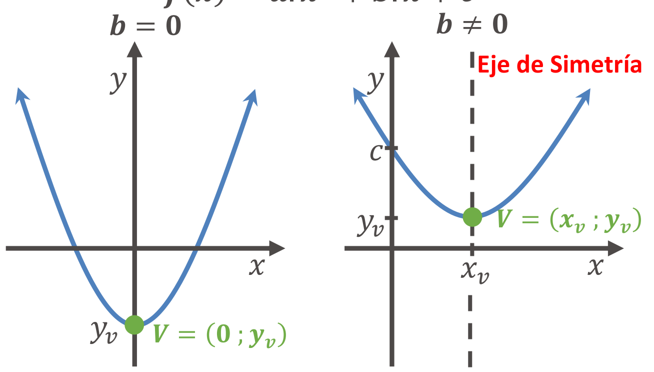


Fig. 45.: Función Cuadrática con $a > 0$ y $b = 0$ o $b < 0$

Luego de haber analizado las diferentes alternativas que puede presentar un desplazamiento horizontal, están en condiciones de completar las siguientes afirmaciones:

Si el $signo\ a$ es ***igual*** al $signo\ de\ b$, el desplazamiento es hacia la …………… del eje de ordenadas.
Si el $signo\ a$ es ***distinto*** al $signo\ de\ b$, el desplazamiento es hacia la …………… del eje de ordenadas.

Por último, el coeficiente c indica la **intersección de la parábola con el eje de ordenadas.**

Un error común es asociar al desplazamiento vertical o respecto del eje de abscisas con el término independiente "c". Para poder analizar si una función cuadrática se ha desplazado verticalmente hacia arriba o hacia abajo del eje x, debe calcularse la ordenada del vértice "y_v", generando la necesidad de obtener en primer lugar x_v y posteriormente evaluar dicho resultado en la expresión algebraica de la función. Es fácil comprobar que si $b = 0$ la abscisa del vértice es cero $(x_v = 0)$ y el desplazamiento vertical coincide con $y_v = c$, caso contrario, si $b \neq 0$ para determinar la cantidad de unidades que se ha desplazado verticalmente la función cuadrática, debemos si o si calcular $y_v = f(x_v)$. El siguiente cuadro resume las diferentes alternativas que pueden presentarse:

Signo de b	Abscisa del Vértice x_v	Ordenada del Vértice y_v	Desplazamiento Vertical
$b = 0$	$x_v = \frac{0}{2.a} = 0$	$y_v = f(x_v) = c$	La función cuadrática se ha desplazado verticalmente c unidades hacia arriba si $c > 0$, c unidades hacia abajo, si $c < 0$ o si $c = 0$ no presenta desplazamiento vertical.
$b \neq 0$	$x_v = -\frac{b}{2.a}$	$y_v = f(x_v)$	La función cuadrática se ha desplazado verticalmente y_v unidades hacia arriba si $y_v > 0$, y_v unidades hacia abajo si $y_v < 0$ o no presenta desplazamiento vertical si $y_v = 0$

Tabla N°11

Si $b = 0$ la Función cuadrática es **simétrica par** y verifica que:
$f(x) = f(-x)$
Puedes consultar este tema en el **Punto 1.3.4 del Capítulo N° 1** del texto.

¿El coeficiente c indica por si solo la existencia de un desplazamiento vertical?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Luego de haber analizado los coeficientes constantes de la Función Cuadrática, estamos en condiciones de afirmar que la **imagen de una función cuadrática** depende del valor de ordenada del vértice "y_v" y de la orientación de las ramas de la parábola.

2.4.2 Intersección con los Ejes Coordenados

Intersección con el eje de ordenadas $(\boldsymbol{eje\ y})$:

En el capítulo anterior hemos definido que para calcular la intersección de una función con el eje de ordenadas debemos evaluar a la función cuando la variable independiente asume el valor $x = 0$, es decir $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$.

Por lo tanto, toda función cuadrática interseca al eje de ordenada en el punto $\left(0; f(0)\right) = (0; c)$.

Intersección con el eje de abscisas $(\boldsymbol{eje\ x})$:

Tal y como has estudiado, las intersecciones de una función con el eje de abscisas se obtienen buscando las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$.

La función cuadrática cuya expresión algebraica es $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ se anula en los valores que sean solución a la ecuación cuadrática $a.x^2 + b.x + c = 0$.

Para resolver esta ecuación debemos aplicar la fórmula cuadrática, también denominada **fórmula resolvente:**

FÓRMULA RESOLVENTE

(también denominada fórmula cuadrática)

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ (es a distinto de cero), están dadas por:

$$\boxed{x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Puedes consultar el tema **Ecuaciones Cuadráticas** en el **Punto 3.1.3 del Capítulo N°0.**

Muchas veces antes de realizar todos los cálculos, es recomendable averiguar si la parábola interseca al eje de abscisas obteniendo el valor del **discriminante** $\Delta = b^2 - 4.a.c$, es decir el radicando asociado a la raíz cuadrada presente en la fórmula resolvente.

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$ obtendremos dos raíces reales distintas. La función cuadrática interseca al eje de abscisas en los valores x_1 y x_2, siendo sus respectivos puntos $(x_1; 0)$ y $(x_2; 0)$.
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$ obtendremos dos raíces reales e iguales. La función cuadrática interseca al eje de abscisas en un único valor real dado que $x_1 = x_2$, siendo las coordenadas del punto $(x_1; 0)$.
- Si $\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$ obtendremos dos raíces complejas. La función cuadrática no interseca al eje de abscisas.

En la siguiente figura se representa la gráfica de una función cuadrática con $a > 0$ y diferentes discriminantes (Δ):

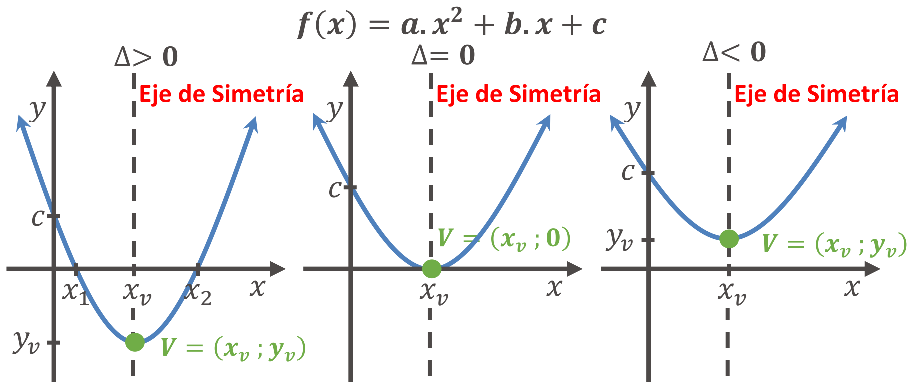


Fig. 46.: Función Cuadrática

Si el $\Delta = 0$, ¿Qué nombre recibe el punto donde la función cuadrática interseca al eje de abscisas? Justifica analíticamente la respuesta.

………

………

……………………………………………………………………………………………………

Si el $b^2 > 4.a.c$, ¿presenta la parábola intersección con el eje de abscisas?

………

………

……………………………………………………………………………………………………

Dada la función $f(x) = x^2 - 4$. Se solicita que:

1. Aproximes su comportamiento gráfico identificando puntos notables y signos de sus coeficientes constantes.
2. Determines cuál es el dominio de definición y la imagen de $f(x)$.
3. Identifiques los intervalos del dominio de f para los cuales la función es positiva, negativa o nula.
4. Identifiques los intervalos del dominio de f para los cuales la función es creciente o decreciente.

Resolución:

1. Esta función cuadrática tiene por coeficientes constantes $a = 1$, $b = 0$ y $c = -4$. Rápidamente podemos deducir que no presenta desplazamiento horizontal, pues $x_v = -\frac{b}{2.a} = -\frac{0}{2} = 0$ y se ha desplazado verticalmente 4 unidades hacia abajo, pues $y_v = f(x_v) = f(0) = -4$.

Luego, el $V = (x_v; y_v) = (0; -4)$. Dicho punto es la intersección de la función con el eje de ordenadas $(eje\ y)$. La ecuación del eje de simetría es $x = x_v = 0$.

La función $f(x) = x^2 - 4$, presenta dos intersecciones con el eje de abscisas dado que $\Delta = 0^2 - 4\,.1.(-4) = 16 > 0$ y los valores que satisfacen a la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ son:

$$x_i = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4\,.1.(-4)}}{2\,.1} = \frac{\pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Luego, $(-2; 0)$ y $(2; 0)$ son los puntos de corte de la función con el eje x.

Además, por ser $a > 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba.

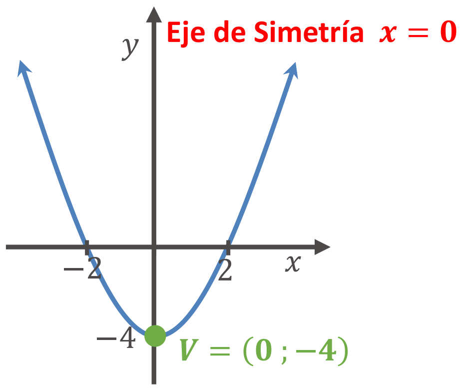


Fig. 47.: Gráfica de la Función Cuadrática $f(x) = x^2 - 4$

2. El dominio de definición de f es $Domf = \mathbb{R}$ y su imagen es $Imf = [-4; \infty)$

3. Se presentan a continuación los intervalos del dominio de la función $f(x) = x^2 - 4$ en donde es positiva, negativa y nula:

$\boldsymbol{Intervalo\ de\ Positividad}: (-\infty; -\mathbf{2}) \cup (\mathbf{2}; \infty)$
$\boldsymbol{Intervalo\ de\ Negatividad}: (-\mathbf{2}; \mathbf{2})$
$\boldsymbol{Nula}: \boldsymbol{en\ x_1 = 2\ y\ x_2 = -2}$

4. Se presentan a continuación los intervalos del dominio de la función $f(x) = x^2 - 4$ en donde es creciente o decreciente:

$\boldsymbol{Intervalo\ de\ Crecimiento}: (\mathbf{0}; \infty)$
$\boldsymbol{Intervalo\ de\ Decrecimiento}: (-\infty; \mathbf{0})$

2.4.3 Otras Formas de Expresar a una Función Cuadrática

La expresión analítica por la que se ha presentado a la función cuadrática recibe el nombre de ***forma polinómica***, pero no es la única forma en la que podemos expresar analíticamente a una función cuadrática.

Les presentamos ahora tres maneras en las que podemos expresar a esta función y las características e información que brindan.

Puedes consultar el tema **Productos Notables** en el **Punto 2.1.1 del Capítulo N°0.**

Forma polinómica: se llama así porque la función está expresada como un polinomio.

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c \qquad \text{con } a \neq 0$$

Forma factorizada: Las raíces de una función, si es que existen, nos permitirán expresar la fórmula de una función cuadrática en forma factorizada.

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2) \quad \text{con } a \neq 0$$

Siendo a el *coeficiente del término cuadrático* de la función, por ello se extrae siempre como factor común, de no escribirse, el coeficiente de x^2 sería siempre 1. En caso de existir, los valores x_1 y x_2 representan las raíces de $f(x)$. En el caso de que el discriminante $\Delta = 0$ entonces $x_1 = x_2$ por lo que podríamos escribir:

$$f(x) = a.(x - x_1)^2$$

Forma canónica: Toda función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio de la siguiente manera:

$$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v \text{ con } a \neq 0$$

Siendo $(x_v; y_v)$ las coordenadas del vértice.

Como cierre de la sección funciones cuadráticas, te proponemos que realices un mapa conceptual.

Puedes realizar el mapa conceptual mediante la aplicación *Cmap Tools* .

2.4.4 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 11: Dada las siguientes funciones cuadráticas:

$i)$ $f(x) = 2x^2 - 8$ $ii)$ $f(x) = -x^2 + 10x - 21$

Se te solicita que:

a) Aproximes su comportamiento gráfico identificando puntos notables y signos de sus coeficientes constantes.

b) Determines Dominio e Imagen.

c) Identifiques los intervalos del dominio de f para los cuales la función es positiva, negativa o nula.

d) Identifiques los intervalos del dominio de f para los cuales la función es creciente ó decreciente.

En el siguiente link, encontrarás las resoluciones de algunos apartados de las Actividades 11,12 y 13 https://youtu.be/ZINnf18QpVc

ACTIVIDAD 12: Dada las siguientes funciones cuadráticas:

$i)$ $f(x) = (x+1)^2 - 1$ $ii)$ $f(x) = (x-1)^2 + 4$

Se te solicita que:

a) Determines la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice.

b) Analices si presentan desplazamientos horizontales o verticales a partir de la función elemental $f(x) = x^2$.

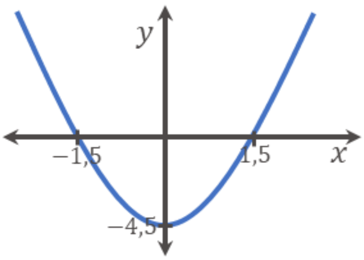
c) Aproximes su comportamiento gráfico identificando puntos notables y signos de sus coeficientes constantes.

d) Determines Dominio e Imagen.

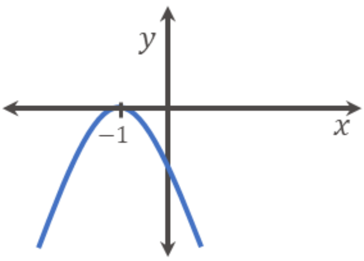
e) Escribas su expresión analítica en la forma polinómica y factorizada (en caso de ser posible).

ACTIVIDAD 13: Dados los comportamientos gráficos de las funciones cuadráticas:

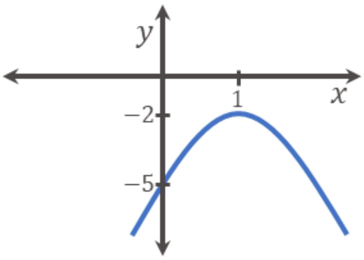
$Gráfico\ N°1$



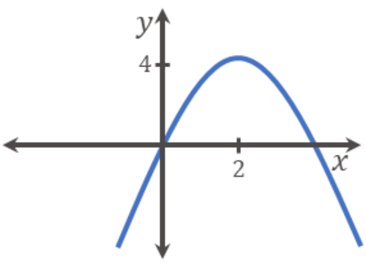
$Gráfico\ N°2$



$Gráfico\ N°3$



$Gráfico\ N°4$



Se te solicita que completes las siguientes tablas:

	Signo				Intersección	
Gráfico	a	b	c	Δ	Eje x $(\cap\, x)$ $f(x)=0$	Eje y $(\cap\, y)$ $f(0)=c$
1						
2						
3						
4						

Gráfico	Ecuación del Eje de Simetría $(x = x_v)$	Coordenadas del Vértice $(x_v; y_v)$	¿Es una función Par? $f(x) = f(-x)$
1			
2			
3			
4			

	Intervalos del dominio donde la función es				
Gráfico	Positiva $f(x) > 0$	Negativa $f(x) < 0$	Nula $f(x) = 0$	Creciente	Decreciente
1					
2					
3					
4					

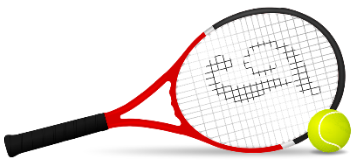
2.5 Aplicaciones Económicas de las Funciones Cuadráticas

El modelo de costos, ingresos y beneficios presentado en el **Punto 2.3**, suponía un comportamiento lineal para las funciones bajo estudio. El hecho de utilizar una función de costos lineal implica que los **costos variables por unidad** son constantes (pendiente de la función de costo total) y supone que los costos fijos también son constantes en el nivel de operación o producción (ordenada al origen) que se considera. Además, la función lineal del ingreso supone que **el precio de venta por unidad** es constante (pendiente de la función ingreso total).

Dichos supuestos pueden ser útiles para entender el comportamiento de las funciones en estudio, pero ignoran la posibilidad de **economías o deseconomías de escala**. Esto es, las funciones lineales del costo implican **rendimientos constantes a escala** lo que significa que independientemente del número de unidades producidas, el costo variable por unidad es el mismo, ignorando la posibilidad que los elementos del proceso productivo (maquinarias y trabajadores) puedan ser más eficientes conforme aumenta el número de unidades producidas o que la compra de materias primas en grandes cantidades pueda dar como resultado descuentos por cantidad. De la misma manera, los rendimientos constantes a escala suponen una función de ingresos lineal con un precio de venta que no varía independientemente del número de unidades vendidas, no admitiendo la posibilidad que la empresa pueda realizar descuento por cantidad.

Pensar en la posibilidad de considerar que estas funciones admitan comportamientos no lineales, puede ayudarnos a acercar más el modelo a la realidad. Además, comprender el comportamiento funcional nos permite utilizar los conocimientos matemáticos en beneficio del estudio de esta realidad, por ejemplo, si la función de costos tiene un comportamiento cuadrático, mediante el cálculo de las coordenadas del vértice, es posible buscar el valor mínimo de la función.

Consideremos el caso de una empresa que se dedica a la producción de raquetas. La misma ha determinado que el costos medio de producción en dólares viene dado por $C(x) = 0{,}02x^2 - 8x + 1500$, siendo x el número de raquetas fabricadas por día. Además, la capacidad de producción diaria de la empresa es de 250 raquetas. Se solicita:



Abordaremos el estudio de la función de costo medio en el **punto 4.3.1 “Funciones Medias y Marginales”** del capítulo 4.

1. Determinar el número diario de raquetas que deberán fabricarse para minimizar el costo medio y el valor al que ascienden el costo medio para ese nivel de producción.

2. Indicar si a la empresa, para minimizar sus costos medio, le conviene producir 200 raquetas o 250, que es la capacidad máxima de producción.

Resolución:

1. La respuesta a este interrogante se obtiene simplemente calculando el valor de abscisa del vértice:

$$x_v = \frac{-(-8)}{2\,.\,0{,}02} = 200$$

Este valor nos dice que, para minimizar el costo medio, la empresa debe producir diariamente 200 raquetas. Además, para ese nivel de producción, el costo asciende a $y_v = C(200) = 0{,}02.(200)^2 - 8.200 + 1500 = 700$ dólares por día.

2. Por ser $a = 0{,}02 > 0$ las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba, por lo tanto, el mínimo del costo se da en $x_v = 200$ y no en $x = 250$. Esto también puede comprobarse calculando el costo para 250 unidades, $C(250) = 750$ el que obviamente es mayor.

2.5.1 Guía de Actividades Prácticas

<u>ACTIVIDAD 14</u>**: Un Ejemplo de Marketing**. Una consultora de marketing ha estimado que, desde la introducción al mercado de un nuevo producto, el número de compradores que lo adquirirán por día viene dado por:

$$f(x) = -\frac{10}{9}.x.(x-24)$$

Se te solicita que:

a) Grafiques la situación bajo estudio y determines cuál es el intervalo de tiempo (medido en días) para el que tiene sentido el análisis en cuestión.

b) Estimes el número máximo de compradores que adquirirán el producto.

<u>ACTIVIDAD 15</u>**: El Gasto en Publicidad**. Una empresa determina que sus beneficios en miles de dólares dependen del gasto en publicidad que realizan. Su presupuesto para gastos en publicidad es de $4900\ U\$S$ para destinarlos a la difusión de sus productos. Si $B(x) = -x^2 + 12x - 20$ es el beneficio ante el gasto en publicidad de x miles de dólares, se te solicita que:

a) Identifiques si toda la información disponible está medida en la misma unidad monetaria.

b) Determines si la empresa tendrá ganancia o pérdida si gasta todo su presupuesto.

c) Indiques cuántos dólares necesita gastar la empresa para obtener el beneficio máximo. Indica si dicho monto respeta el presupuesto disponible.

d) Indiques el intervalo de gasto en publicidad para que la empresa tenga ganancias considerando el presupuesto disponible.

ACTIVIDAD 16: Carlos, tiene una empresa que fabrica calefactores y quiere conocer el número de unidades que ha de vender para no ganar ni perder dinero y también la cantidad de unidades que debe producir y vender para obtener ganancias.

Luego de una semana muy atareada, se reúne con Pedro, su gerente de producción y le pide información sobre los costos de su empresa. Éste le informa que sus costos variables unitarios ascienden a $\$1800$ por calefactor producido y que sus costos fijos mensuales ascienden a $\$210000$. Además, le aclara que, 2000 unidades es la capacidad máxima de producción mensual de su fábrica.

La empresa hace algún tiempo ha puesto en alquiler un inmueble de su propiedad del que recibe mensualmente $\$10000$. Además, Pedro sabe que sus ingresos se comportan como una función cuadrática par y que si mensualmente vende 50 calefactores el ingreso total (alquiler del inmueble y venta de calefactores) de la empresa es de $\$510000$.

Se te solicita que:

a) Escribas las ecuaciones que representa la Función de Costo Total, Ingreso Total y Beneficio Total.

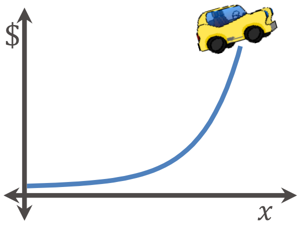
b) Halles el número de calefactores que ha de producir y vender para no ganar ni perder dinero.

c) Indiques al menos cuántos calefactores ha de producir y vender para obtener ganancias.

d) Halles la cantidad de calefactores debe vender Carlos para ganar $\$1209000$.

e) Representes gráficamente todas las funciones e interpretes la situación si 450 es el número de calefactores que se producen y venden.

2.6 Funciones Exponenciales



Luis, estudiante de primer año de una de las carreras de ciencias económicas quiere comprarse su primer auto. En este momento sólo dispone de $\$30000$ que son sus ahorros y el auto que le gusta cuesta $\$90000$.

Decide ir a hablar con sus padres y preguntarles qué es lo que puede hacer con ese dinero. Su madre, le propone acompañarlo el lunes al banco emisor de su tarjeta de crédito a fin de consultar respecto de la tasa que le pagaría por depositar el dinero durante un mes en plazo fijo.

El lunes a primera hora se dirigen con mucha prisa al banco y luego de esperar unos minutos son atendidos por un asesor financiero. Éste les informa que si depositan los $\$30000$ durante un mes, el banco les pagaría el 1,16%. Luis, piensa *"¡¡¡con esa tasa jamás me voy a poder comprar el auto!!!"*.

¿Cuánto dinero tendrá Luis al cabo de 1 *año?, ¿y al cabo de* 2 *años?*

En esta sección estudiarás las particularidades que caracterizan a las **funciones exponenciales**, que te permitirán contestar las preguntas que acabamos de realizar.

Definición:

Se denomina **función exponencial** a toda función cuya expresión algebraica es:

$$\boldsymbol{y = f(x) = b^x}$$

En donde $\boldsymbol{b > 0}$, $\boldsymbol{b \neq 1}$ y el exponente x es cualquier número real.

El coeficiente constante b se denomina *base* y dado que es un número positivo y distinto de 1, pueden presentarse dos casos en función al valor que dicho parámetro asuma.

¿Puedes identificar cuáles son esos dos casos que presenta la base de una Función Exponencial?

....

....

....

Si $b = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$. Esta función ya la han estudiado anteriormente cuando definimos función constante.

Puedes consultar el tema **Propiedades de la Potencia** en el **Punto 1.5 del Capítulo N°0.**

2.6.1 Análisis del Coeficiente Constante de la Funciones Exponenciales – Comportamiento Gráfico

La siguiente figura muestra los dos comportamientos gráficos que presenta una función exponencial de base b.

$$\boldsymbol{y = f(x) = b^x}$$

$\boldsymbol{b > 1}$ $\boldsymbol{0 < b < 1}$

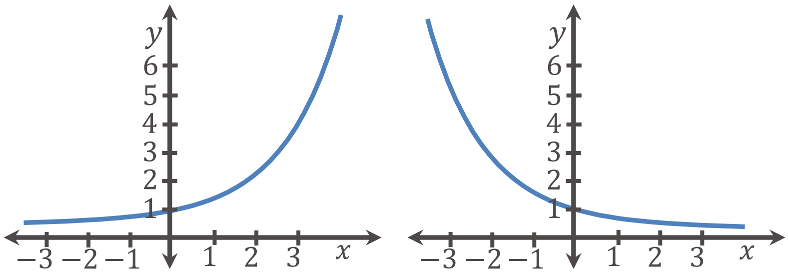


Fig. 48.: Función Exponencial

Para un mejor análisis de la función bajo estudio, se presenta en primer lugar las características comunes a ambos casos y posteriormente las diferencias que existen.

Una de las funciones exponenciales más utilizadas en Ciencias Económicas es la llamada **función exponencial natural** la que se define como:

$$f(x) = e^x$$

Por ser el número irracional e mayor a 1 $(e > 1)$, este tipo particular de funciones exponenciales cumple con las características presentes para $b > 1$.

Las funciones exponenciales **no desplazadas** presentan las siguientes características comunes:

1. El Dominio de definición de este tipo de funciones es el conjunto de los Números Reales y se denota por $Dom f = \mathbb{R}$. El conjunto Imagen es el conjunto de los Reales Positivos y se denota por $Im\ f = \mathbb{R}^+ = (0\ ;\ \infty)$.
2. Son funciones positivas dado que $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, su intervalo de positividad es $(-\infty; \infty)$.
3. Puesto que para todo $b \neq 0$, $f(0) = b^0 = 1$, la gráfica de $f(x)$ interseca al eje de ordenadas $(eje\ y)$ en el par ordenado $(0; 1)$.
4. Puesto que para todo valor real x, $b^x \neq 0$ siempre, concluimos que las funciones exponenciales no tienen intersección con el eje de abscisas $(eje\ x)$.

Las funciones exponenciales **no desplazadas** presentan las siguientes características distintivas:

si $\boldsymbol{b > 1}$

1. Poseen gráficas que ascienden de izquierda a derecha, es decir que son crecientes a medida que aumenta la variable independiente. Su intervalo de crecimiento es $(-\infty; \infty)$.
2. Presenta un crecimiento exponencial, que es más explosivo que el crecimiento polinomial. Gráficamente la función crece cada vez más rápido.

3. Cuando la variable independiente **tiende** a tomar valores muy pequeños, la función **tiende** a anularse (a tomar el valor cero).
   En Símbolos:
$$\lim_{x \to -\infty} b^x = 0$$
   En este caso, la función exponencial posee **Asíntota Horizontal** cuya ecuación es $y = 0$.

En los próximos capítulos diremos que una función exponencial de $b > 1$ crece a ritmo creciente.

si $0 < b < 1$

1. Poseen gráficas que descienden de izquierda a derecha, es decir que son decrecientes a medida que aumenta la variable independiente. Su intervalo de decrecimiento es $(-\infty; \infty)$.
2. Presenta un decrecimiento exponencial, que es más explosivo que el decrecimiento polinomial.
3. Cuando la variable independiente **tiende** a tomar valores muy grandes, la función **tiende** a anularse (a tomar el valor cero).
   En Símbolos:
$$\lim_{x \to \infty} b^x = 0$$
   En este caso, la función exponencial posee **Asíntota Horizontal** cuya ecuación es $y = 0$.

En los próximos capítulos diremos que una función exponencial de $0 < b < 1$ decrece a ritmo creciente.

Dijimos **tiende**, para hacer referencia que la función se acerca a cero, sin llegar a asumir dicho valor.
En el próximo capítulo ampliaremos estos conceptos utilizando la noción de **límite**.
Además, cuando abordemos el tema **"Análisis Diferencial"** (Capítulo N°5) serás capaz de justificar estas afirmaciones.

Cuando abordemos el tema **"Asíntotas Horizontales y Asíntotas verticales"** (Capítulo N°3) se profundizará la existencia de asíntotas en la Función Exponencial.

2.6.2 Desplazamientos de una función exponencial

Las características presentadas para las funciones exponenciales se mantienen en tanto no exista desplazamientos verticales u horizontales.

Desplazamientos Vertical: La función $g(x) = b^x + c$ es la función $f(x) = b^x$ desplaza verticalmente c unidades hacia arriba si $c > 0$ o c unidades hacia abajo si $c < 0$.

Desplazamientos Horizontal: La función $g(x) = b^{x-c}$ es la función $f(x) = b^x$ desplaza horizontalmente c unidades hacia la derecha si $c > 0$ o c unidades hacia la izquierda si $c < 0$.

Las funciones exponenciales desplazadas verticalmente, ¿presentan intersección con el eje de abscisas $(eje\ x)$?

………

………

……

Como cierre de la sección función exponencial, te proponemos que realices un mapa conceptual.

Puedes realizar el mapa conceptual mediante la aplicación Cmap Tools .

2.6.3 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 17: Dada las siguientes funciones exponenciales:

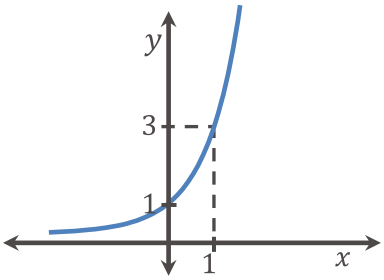
$i)$ $f(x) = 3^x - 9$ $\quad$ $ii)$ $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

Se te solicita que:

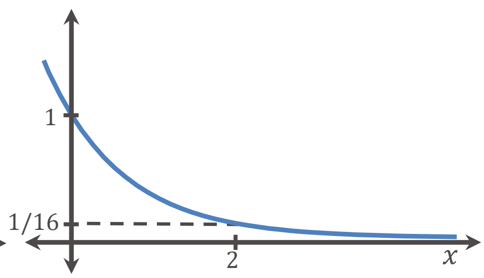
a) Aproximes su comportamiento gráfico identificando puntos notables y signo de su coeficiente constante.
b) Determines su Dominio e Imagen.
c) Identifiques los intervalos del dominio de f para los cuales la función es positiva, negativa o nula.
d) Identifiques los intervalos del dominio de f para los cuales la función es creciente ó decreciente.
e) Escribas la ecuación de la asíntota horizontal.
f) Analices si presentan algún tipo de desplazamiento (horizontales ó verticales).

ACTIVIDAD 18: Los siguientes gráficos corresponden a funciones exponenciales de la forma $f(x) = b^x$. Indica, para cada uno de ellos, el valor de la base "b":

$Gráfico\ N°1$



$Gráfico\ N°2$



2.7 Aplicaciones Económicas de las Funciones Exponenciales

Para aquellas personas a quienes les gustan los automóviles y, poseen capacidad financiera para adquirirlos, una visita a una concesionaria puede ser una situación sumamente gratificante. Sin embargo, el proceso de compra de un automóvil tiene un lado que muchos individuos consideran como una experiencia poco placentera: *"la negociación"*. El proceso por el que vendedor y comprador acuerdan la compra del automóvil puede ser difícil sobre todo si este último no dispone del dinero necesario para adquirirlo, pretende comprar a plazo y la situación se agrava aún más si no es completamente consciente del dinero que deberá desembolsar frente a las diferentes alternativas de financiación que el vendedor le pueda ofrecer. Por ejemplo, podríamos preguntarnos ¿cómo es que un automóvil de $390600 se ofrece en cuotas mensuales de $21724 a una tasa de interés determinada?, ¿cuál es la cantidad de cuotas a pagar?, etc.

Preguntas como éstas dan origen a una de las ramas de la matemática denominada **Matemática Financiera**. Como futuros egresados en ciencias económicas poseerán, al finalizar sus carreras, un conjunto de capacidades que les permitirán entender mejor el funcionamiento de esta disciplina. Sin embargo, hoy en día están dando sus primeros pasos en lo que es el conocimiento del herramental matemático, éstos son el cimiento sobre el cual se sustentará sus futuras decisiones financieras de compra e inversión atendiendo siempre a la alternativa más conveniente.

En el presente apartado les presentaremos dos situaciones que son de sumo interés y que sirven de ejemplo de aplicación de las Funciones Exponenciales.

2.7.1 Interés Compuesto

Los depósitos de capital "C" (dinero) realizados en una entidad bancaria a una tasa de interés "i" (expresada porcentualmente), aumentan su valor a medida que transcurre el tiempo. El banco suma periódicamente el interés producido por la operación, de manera que al finalizar cada período el capital que se obtiene es el capital originalmente depositado más los intereses producidos por ese capital durante dicho periodo.

Con el paso del tiempo, los intereses generados en un período generarán nuevos intereses, produciéndose el proceso denominado **capitalización del dinero** en el tiempo. Los intereses recibidos son reinvertidos y pasan a convertirse en nuevo capital.

Se denomina **tasa de interés** a aquella utilizada para medir la rentabilidad obtenida por el ahorro o inversión de una cierta cantidad de dinero mantenida en el tiempo, o el costo de pagar una deuda en cuotas.

Por ejemplo, en el primer mes un capital de C pesos se habrá incrementado a $C.(1+i)$, al finalizar el segundo mes a $C.(1+i).(1+i) = C.(1+i)^2$ y así sucesivamente.

De esta manera, la fórmula para determinar el valor del capital en el futuro (también denominado **monto**) después de x períodos de tiempo viene dada por:

Se denomina **fórmula de monto** "$\boldsymbol{M}$" a la expresión:

$$\boldsymbol{M(x) = C.(1+i)^x}$$

En donde $\boldsymbol{C}$ es el capital original, $\boldsymbol{i}$ la tasa de interés y $\boldsymbol{x}$ es el período de tiempo. La diferencia entre $M - C$ se llama **interés compuesto** o simplemente **interés**.

Si $x = 0$, puede comprobarse que $M(0) = C$, por lo tanto, estas Funciones Exponenciales intersecan al eje de ordenadas $(eje\ y)$ en el par ordenado $(0; C)$. Además son siempre funciones exponenciales crecientes por ser $(1+i) > 0$.

Las entidades bancarias utilizan el crecimiento exponencial para calcular cuánto tienen que pagar a los clientes que realizaron depósitos de dinero a un interés compuesto, al final del tiempo convenido.

Un capital C que se deposita en un banco al 7% anual, al cabo de dos años es:

$$\boldsymbol{M(x) = C.(1+0,07)^2 = C.(1,07)^2}$$

Si quisiéramos averiguar cuál es el valor futuro de un peso ($\$1$) depositado a 7% anual al cabo de x años, simplemente debemos reemplazar a $C = 1$, de esta manera:

$$\boldsymbol{M(x) = 1.(1+0,07)^x = (1,07)^x}$$

A pesar de haberse presentado el concepto de **Interés Compuesto** en términos del depósito de dinero en una entidad bancaria, el mismo también es aplicable en los casos que una persona preste dinero a otra, una empresa venda una mercadería a crédito, o compre a plazo a un proveedor, etc.

Continuando con el ejemplo de Luis, ¿te animas a escribir cuál es la expresión algebraica que permite calcular el monto de dinero que dispondrá al cabo de un año y al cabo de dos si decide depositar hoy en plazo fijo sus $\$30000$?

....

....

....

Actividad de Investigación: Te proponemos que investigues sobre el concepto de **interés simple**, escribas la expresión que permite calcularlo (analizando sus coeficientes constantes) e indiques a qué tipo de función de las estudiadas corresponde. Por último, indica la diferencia que tiene con el interés compuesto y plantea un ejemplo que permita comparar ambos tipos de interés.

……

……

………

2.7.2 Inflación y Devaluación

Hoy en día, un concepto muy mencionado, que está en boca de políticos, medios de comunicación y de las personas en general, es el de Inflación. Se denomina **Inflación** al aumento sostenido del nivel general de precios de bienes y servicios existentes en un mercado durante un cierto período de tiempo. Por ejemplo, si en un momento determinado un bien cuesta \$1000 y al cabo de un año cuesta \$1150, diremos que la inflación ha sido del 15 %.

Este aumento ocasiona una pérdida del **poder adquisitivo** de la moneda local del país y es por ello que asociado al concepto de inflación tenemos también el de devaluación.

Se denomina **devaluación** a la caída del valor de la moneda local de un país en relación con otras monedas que cotiza en los mercados internacionales, como por ejemplo el dólar estadounidense, el euro, etc. En un contexto de inflación, cuando los consumidores no tienen confianza en la economía local, suelen volcarse a la compra de moneda extranjera. Esto ocurre ya que las divisas mencionadas suelen considerarse como un refugio de valor más estable y sólido que la divisa local. Al incrementarse la cantidad demandada de moneda extranjera, se aumenta su precio y se produce la devaluación. A modo de ejemplo, si con el mismo dinero un año atrás se podían adquirir 10 botellas de gaseosa y hoy, sólo se pueden adquirir 9, se dice que el dinero se ha devaluado un 10 %.

La fórmula para determinar la evolución del poder adquisitivo del dinero que se ha devaluado después de x períodos de tiempo viene dada por:

Se denomina **valor devaluado** "$\boldsymbol{V}$" a la expresión:

$$\boldsymbol{V(x) = Vn.(1-d)^x}$$

En donde $\boldsymbol{V_n}$ es el valor nominal, $\boldsymbol{d}$ la tasa de descuento (expresada porcentualmente) y $\boldsymbol{x}$ es el período de tiempo. La diferencia entre $V_n - V$ se llama **devaluación**.

Un capital Vn que se devalúa un 5% por año, al cabo de dos años es:

$$\boldsymbol{V(x) = Vn.(1-0,05)^2 = Vn.(0,95)^2}$$

Si quisiéramos averiguar cuál es el valor adquisitivo que tendrá un peso ($\$1$) que se devalúa luego de x años, a la tasa del 5% anual, debemos reemplazar a $\boldsymbol{Vn} = 1$, de esta manera:

$$\boldsymbol{V(x) = 1.(1 - 0,05)^x = (0,95)^x}$$

2.7.3 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 19: Una persona coloca un cierto capital en una entidad bancaria al 2% anual. Luego de 3 años, el monto que tiene en el banco es de $9550,872.

Se te solicita que:

a) Grafiques la situación bajo estudio.

b) Calcules el capital depositado originalmente.

ACTIVIDAD 20: El precio de reventa (en $U\$S$) de un camión se comporta de acuerdo con la siguiente función $V(t) = 40000.e^{-0,3t}$, donde V es el valor de reventa y t son los años transcurridos desde su adquisición.

Con la información que dispones, se te solicita que:

a) Calcules cuál es el valor original de incorporación del camión.

b) Calcules cuál es el valor al que se podrá vender después de transcurrido 5 años.

ACTIVIDAD 21: Otro método de depreciación de bienes de uso. Una empresa ha comprado una computadora de última generación por $\$55000$. El contador indica que es posible depreciar todos los meses el equipo a una tasa del $\frac{100}{60}\%$ de su valor.

Con la información disponible, se te solicita que:

a) Escribas cuál es la función que representa el “valor de libros” luego de x meses.

b) Determines el “valor de libro” de la computadora al finalizar el cuarto año.

c) Analices si por este método de depreciación el valor de la computadora es mayor, menor o igual al que surge por el método de depreciación lineal (utiliza la misma tasa de depreciación).

Una alternativa a la **depreciación lineal** de los bienes de la empresa es la **depreciación por saldo decreciente**. Este método supone que los bienes pierdes su valor más rápidamente al inicio de su vida útil que en etapas posteriores.

2.8 Funciones Logarítmicas

Retomemos nuevamente el ejemplo de Luis. Seguramente ya habrás podido escribir la expresión que permite calcular el valor de esos $\$30000$ depositados en plazo fijo durante una cantidad determinada de tiempo.

Ahora bien, si nos preguntamos ¿cuánto tiempo necesitará dejar en depósito su dinero para que con los intereses generados obtengan finalmente los $\$90000$ a fin de realizar la compra de su primer auto?

Una forma de responder a esta pregunta es realizar el gráfico de la función exponencial $M(x) = 30000.(1 + 0{,}0116)^x = 30000.(1{,}0116)^x$ utilizando todos los conceptos y propiedades ya estudiadas.

El siguiente gráfico representa el valor de dinero puesto en plazo fijo a una tasa del $1{,}16\%$ mensual.

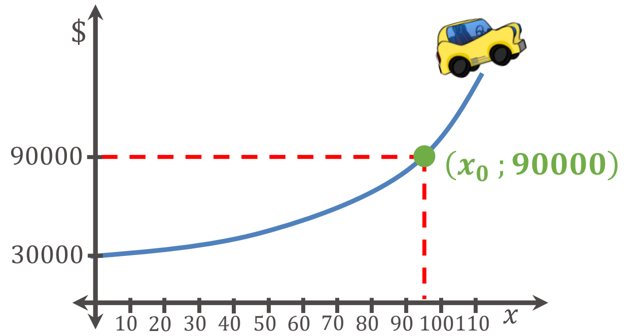


Fig. 49.: Gráfico de la Función Exponencial $M(x) = 30000.(1{,}0116)^x$

El gráfico permite estimar que para que el dinero obtenido sea igual a $\$90000$, el tiempo que el estudiante debería dejar el dinero en el banco debe ser mayor a 90 meses (7 años y 6 meses) y menor que 100 meses (8 años y 4 meses). Sin embargo, para obtener el valor de $x = x_0$ en forma más precisa debemos resolver la igualdad:

$$M(x) = 90000 \Leftrightarrow 30000.(1{,}0116)^x = 90000 \Leftrightarrow (1{,}0116)^x = 3$$

Cabe preguntarnos, ¿Cómo despejamos la variable x para calcular el tiempo exacto? Necesitamos encontrar una nueva función que permita invertir el efecto que produce la función exponencial, esto es:

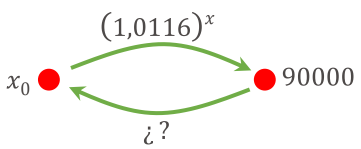


Fig. 50.: ¿Cómo determinamos el tiempo en que el monto alcanzará los $90000?

La función que permite invertir el resultado obtenido por un cálculo exponencial y que resuelve la igualdad planteada es denominada **función logarítmica**.

Definición:

Se denomina **Función Logarítmica** de base b a toda función cuya expresión algebraica es:

$$\boldsymbol{y = f(x) = log_b(x)} \textbf{ sí y sólo sí } \boldsymbol{b^y = x}$$

En donde $\boldsymbol{b > 0}$, $\boldsymbol{b \neq 1}$ y x se denomina argumento.

Calcular el logaritmo de un número es hallar el exponente al que hay que elevar la base del logaritmo para obtener dicho número, por ejemplo:

$y = log_2 8 = 3$

Porque $2^3 = 8$

El coeficiente constante b se denomina *base* y dado que es un número positivo y distinto de 1, pueden presentar dos casos en función al valor que dicho parámetro asuma.

No existen los logaritmos de cero ni de números negativos, por lo tanto, el argumento de la función logarítmica siempre es mayor que cero:

En Símbolos:

$$y = f(x) = log_b(x) \text{ existe } \forall x > 0$$

De esta manera el dominio de definición de $f(x)$ es el conjunto de reales positivos, es decir $Domf = \mathbb{R}^+ = (0\ ;\ \infty)$.

2.8.1 Análisis del Coeficiente Constante de la Función Logarítmica – Comportamiento Gráfico

Una forma sencilla de graficar funciones logarítmicas es mediante los pares ordenados de su inversa exponencial e invirtiendo el orden de sus coordenadas.

A través del uso de la definición de función logarítmica les proponemos encontrar los pares ordenados de la inversa exponencial de las siguiente funciones, completar la tabla de valores y graficar una curva suave que corresponda a cada situación:

$y = log_2(x) \Leftrightarrow$				$y = log_{\frac{1}{2}}(x) \Leftrightarrow$			
x	$y = 2^x$	x	$y = log_2(x)$	x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	x	$y = log_{\frac{1}{2}}(x)$
-2		$\frac{1}{4}$		-2		4	
-1			-1	-1			-1
0		1		0		1	
1			1	1		$\frac{1}{2}$	
2		4		2			2
3		8		3		$\frac{1}{8}$	

Tabla N°12

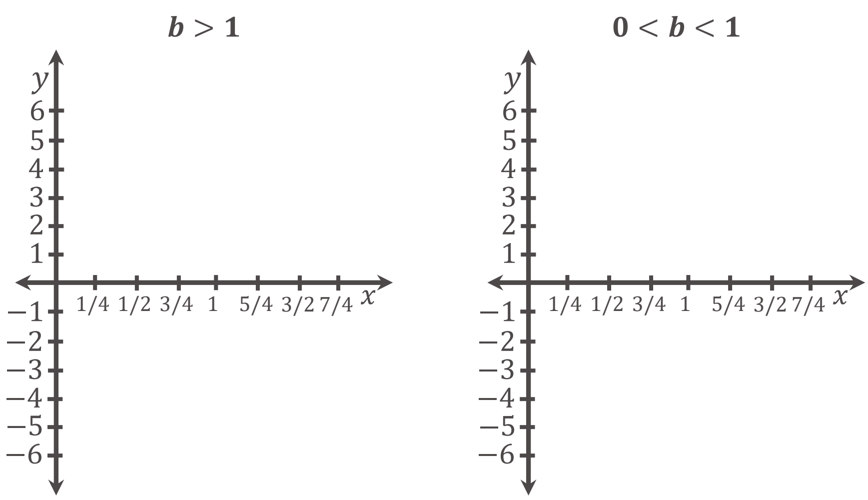


Fig. 51.: Función Logarítmica

De la misma manera en la que se ha abordado función exponencial, para un mejor análisis de la función bajo estudio, se presenta en primer lugar las características comunes a ambos casos y posteriormente las diferencias que existen.

Las funciones logarítmicas **no desplazadas** presentan las siguientes características comunes:

1. El Dominio de definición de este tipo de funciones logarítmicas es el conjunto de los reales positivos y se denota por $Domf = \mathbb{R}^+ = (0\,;\,\infty)$. El conjunto Imagen es el conjunto de los números reales y se denota por $Im\ f = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$.
2. Puesto que para todo $b \neq 0$, $b^0 = 1$, la gráfica de $f(x)$ interseca al eje de abscisas ($eje\ x$) en el par ordenado $(1; 0)$.
3. Puesto que la función está definida para $x > 0$, concluimos que las funciones logarítmicas no presentan intersección con el eje de ordenadas ($eje\ y$).

Las funciones logarítmicas **no desplazadas** presentan las siguientes características distintivas:

Si $b > 1$

1. Poseen gráficas que ascienden de izquierda a derecha, es decir que son crecientes a medida que aumenta la variable independiente. Su intervalo de crecimiento es $(0; \infty)$. Gráficamente la función crece cada vez más lento.
2. Cuanto Mayor es la base, más lento es el crecimiento de la función.
3. Cuando la variable independiente **tiende** a tomar el valor cero, la función **tiende** a tomar valores muy pequeños.

Una de las Funciones Logarítmicas más conocidas es aquella cuya base es el número 10, la que se denomina **logarítmica decimal** y se define como:

$$f(x) = log_{10}(x)$$

También se las suele presentar sin escribir su base como:

$$f(x) = log\ (x)$$

Por ser $b = 10$ mayor a 1 $(10 > 1)$, este tipo de Funciones cumple con las características presentes para $b > 1$.

En símbolos:

$$\lim_{x \to 0^+} log_b(x) = -\infty$$

En este caso, la función logarítmica posee **Asíntota Vertical** cuya ecuación es $x = 0$.

En los próximos capítulos diremos que una función logarítmica de $b > 1$ crece a ritmo decreciente.

Si $0 < b < 1$

1. Poseen gráficas que desciende de izquierda a derecha, es decir que son decrecientes a medida que aumenta la variable independiente. Su intervalo de decrecimiento es $(0; \infty)$. Gráficamente la función decrece cada vez más lento.
2. Cuando la variable independiente **tiende** a tomar el valor cero, la función **tiende** a tomar valores muy grandes.
   En símbolos:
   $$\lim_{x \to 0^+} log_b(x) = +\infty$$
   En este caso, la función logarítmica posee **Asíntota Vertical** cuya ecuación es $x = 0$.

En los próximos capítulos diremos que una función logarítmica de $0 < b < 1$ decrece a ritmo creciente.

2.8.2 Propiedades de los Logaritmos

Éstas son algunas de las propiedades más importantes que se utilizan cuando debemos operar con logaritmos:

1. El logaritmo de un producto es la suma de logaritmos de sus factores:
   $$log_b(m \,.\, n) = log_b(m) + log_b(n)$$
2. El logaritmo de un cociente es la diferencia de logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:
   $$log_b\left(\frac{m}{n}\right) = log_b(m) - log_b(n)$$
3. El logaritmo de una potencia es igual al exponente de la potencia, multiplicado por el logaritmo de la base:
   $$log_b(m^r) = r.\, log_b(m)$$
4. El logaritmo base b y argumento b es igual a 1:
   $$log_b(b) = 1$$

Uso de la Calculadora Científica:

Posiblemente a esta altura ya habrás intentado calcular logaritmos cuya base no aparece en la calculadora, por ejemplo $log_{1/3}(3)$.

Una de las funciones logarítmicas más utilizadas en ciencias económicas es aquella cuya base es el número e, la que se denomina **logarítmica natural** y se define como:

$$f(x) = ln(x)$$

Por ser el número irracional e mayor a 1 $(e > 1)$, este tipo de funciones cumple con las características presentes para $b > 1$.

Cuando abordemos el tema **"Asíntotas Horizontales y Asíntotas verticales"** (Capítulo N°3) se profundizará la existencia de asíntotas en la Función Exponencial. Además, cuando abordemos el tema **"Análisis Diferencial"** (Capítulo N°5) serás capaz de justificar estas afirmaciones.

Fácilmente puedes realizar la gráfica de una función logarítmica, calculando la **intersección con el eje de abscisas** y aplicando la **propiedad 4**.

Los modelos más modernos de calculadoras científicas poseen funciones que permiten obtener el valor del logaritmo de cualquier número indicando la base, pero ¿Qué sucede si la calculadora que tienes solamente tiene las teclas $\boxed{log}$ y $\boxed{ln}$?, ¿debes salir corriendo a comprarte una calculadora nueva? La respuesta es **NO**, simplemente debes conocer una propiedad que es muy útil para calcular logaritmos de cualquier base b. Dicha propiedad se denomina **Cambio de Base** y establece que:

El logaritmo en base b de un número x verifica que:

$$\boldsymbol{log_b(x) = \frac{ln(x)}{ln(b)} = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(b)}}$$

Donde ln representa el logaritmo natural y log_{10} representa el logaritmo decimal es decir log.

2.8.3 Desplazamientos de una Función Logarítmica

Las características presentadas para las Funciones Logarítmicas se mantienen en tanto no exista desplazamientos verticales u horizontales.

Desplazamientos Vertical: La función $g(x) = log_b(x) + c$ es la función $f(x) = log_b(x)$ desplaza verticalmente c unidades hacia arriba si $c > 0$ o c unidades hacia abajo si $c < 0$.

Desplazamientos Horizontal: La función $g(x) = log_b(x - c)$ es la función $f(x) = log_b(x)$ desplaza horizontalmente c unidades hacia la derecha si $c > 0$ o c unidades hacia la izquierda si $c < 0$.

¿Los desplazamientos horizontales modifican el dominio de definición y la imagen de una Función Logarítmica? Justifica tu respuesta.

………

………

………

Como cierre de la sección Función Logarítmica, te proponemos que realices un mapa conceptual.

CmapTools

Puedes realizar el mapa conceptual mediante la aplicación Cmap Tools .

2.8.4 Guía de Actividades Prácticas

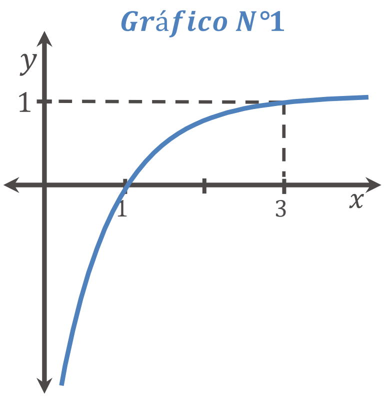
ACTIVIDAD 22: Dada las siguientes funciones logarítmicas:

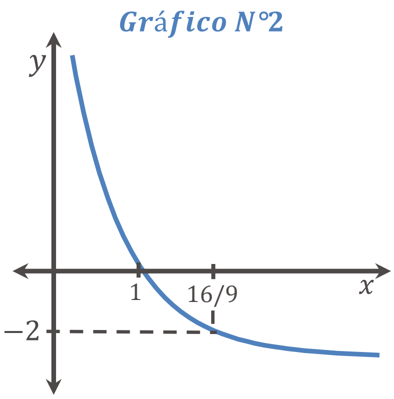
$\boldsymbol{i)}$ $f(x) = log_{\frac{1}{5}}(x)$ $\boldsymbol{ii)}$ $f(x) = log_e(x-1)$

Se te solicita que:

a) Analices si presentan algún tipo de desplazamiento (horizontales o verticales).
b) Aproximes su comportamiento gráfico identificando puntos notables y signo de su coeficiente constante.
c) Determines dominio e imagen.
d) Identifiques los intervalos del dominio de f para los cuales la función es positiva, negativa o nula.
e) Identifiques los intervalos del dominio de f para los cuales la función es creciente ó decreciente.
f) Encuentres ecuación de la asíntota vertical.

ACTIVIDAD 23: Los siguientes gráficos corresponden a funciones logarítmicas de la forma $f(x) = log_b(x)$:





Se te solicita que:

a) Indiques, para cada uno de ellos, el valor de la base "b".
b) Desplaces horizontalmente una unidad a la derecha al $Gráfico\ N°1$ e indiques su expresión algebraica, el dominio y la imagen, ecuación de su asíntota vertical, intervalos donde la función desplazada es positiva, negativa y nula.
c) Desplaces verticalmente dos unidades hacia arriba al $Gráfico\ N°2$ e indiques su expresión algebraica, el dominio y la imagen, ecuación de su asíntota vertical, intervalos donde la función desplazada es positiva, negativa y nula.

2.9 Aplicaciones Económicas de las Funciones Logarítmicas

Como recodarás, al inicio de la temática hemos planteado la pregunta de ¿cuánto tiempo necesitará Luis dejar en depósito su dinero para que con los intereses generados obtengan el valor del auto que desea comprar?

La respuesta a esta pregunta es una de las principales aplicaciones que tienen las Funciones Logarítmicas. Habíamos llegado a que:

$$M(x) = 90000 \Leftrightarrow 30000.(1{,}0116)^x = 90000 \Leftrightarrow (1{,}0116)^x = 3$$

Aplicando logaritmo (decimal, natural, etc.) en ambos miembros de la igualdad:

$$ln[(1{,}0116)^x] = ln(3)$$

Puede observarse que, en el primer miembro, es posible aplicar la **Propiedad 3** ya que tenemos como operación principal un logaritmo y como argumento una potencia, de esta manera:

$$x\, ln(1{,}0116) = ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{ln(3)}{ln(1{,}0116)} \cong 95{,}2562$$

Esto quiere decir que Luis deberá esperar $95{,}2562$ meses para que sus ahorros tripliquen su valor alcanzando un monto de $\$90000$.

El resultado obtenido, ¿a cuántos años, meses y días equivale?

……

……

………………………………………………………………………………………………………

También la utilización de logaritmos permite comparar el tiempo en que una alternativa de inversión genera un monto determinado respecto de otra.

Supongamos que Luis y su madre deciden ir a otro banco el que paga una tasa efectiva mensual del $1{,}19\%$. Claro está que el interés mensual será superior y que Luis podrá comprarse el auto más rápidamente, pero ¿cuántos meses antes que en el primer banco?

Para logra tener un monto de $\$90000$ en esta nueva alternativa debemos resolver:

$$M(x) = 90000 \Leftrightarrow 30000.(1{,}0119)^x = 90000 \Leftrightarrow (1{,}0119)^x = 3$$

$$x\, ln(1{,}0119) = ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{ln(3)}{ln(1{,}0119)} \cong 92{,}8685$$

Con este resultado, concluimos que Luis podrá comprase el auto aproximadamente 2 meses y 11 días antes que en la primer alternativa de inversión. Suponiendo siempre que el precio del auto se mantiene constante en el tiempo.

2.9.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 24: Un capital de $7000, colocado a interés compuesto del 3% anual, se ha convertido al cabo de unos años en $\$10342{,}188$.

Se te solicita que:

a) Grafiques la situación bajo estudio.

b) Calcules los años que han transcurrido.

ACTIVIDAD 25: Un cierto capital está colocado a un interés compuesto del 10% efectivo anual. ¿Luego de cuánto tiempo el capital se triplica? Expresa el resultado en años, meses y días.

ACTIVIDAD 26: Depreciación de bienes de uso por saldo decreciente. Continuando con el caso planteado en la Actividad 21, te proponemos que determines a partir de qué momento el *valor de libro* será inferior a 50% del *valor de compra*.

CAPÍTULO Nº3:

LÍMITE Y CONTINUIDAD

Objetivos:

Al finalizar este tercer capítulo deberás ser capaz de:

- ✓ Interpretar el concepto de límite de una función y sus propiedades algebraicas.
- ✓ Resolver el cálculo de límites determinados e indeterminados.
- ✓ Identificar las distintas asíntotas de una función mediante el cálculo de límites.
- ✓ Comprender la noción de continuidad en un punto y en un intervalo.
- ✓ Distinguir los distintos tipos de discontinuidades.

Contenidos:

3. Límite y Continuidad de una Función

En los capítulos anteriores aprendimos a identificar las "**tendencias**" que presentan las funciones. En este capítulo se abordará la definición **intuitiva y formal de límite**, y el estudio de la **continuidad de funciones**. Ambos conceptos son de gran utilidad y aplicación en el ámbito de las ciencias económicas.

El estudio del **límite de funciones y su continuidad** constituyen el paso previo al cálculo diferencial. Los mismos guardan una estrecha relación con los conceptos de **variaciones, cambios y movimientos,** que serán estudiados en los próximos capítulos.

En Matemática, la evolución histórica del concepto de límite se puede dividir en tres grandes etapas que se remontan hasta los antiguos griegos, donde filósofos como Arquímedes y Eudoxo lo utilizaban para calcular áreas; por ejemplo, si querían conocer el área de una figura cuya forma no era conocida, la descomponían en figuras conocidas (triángulos, rectángulos, etc.) más pequeñas, de modo que estas ocuparan la totalidad de la figura. Luego sumaban el área individual de las figuras más pequeñas para tener una mejor aproximación del área total.

Posterior a este período clásico, encontramos en el siglo $XVII$, la segunda etapa de desarrollo del concepto, donde se trabajó fuertemente en una rigurosa formalización matemática del tema. Referentes de este momento histórico son Isaac Newton (1648-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716).

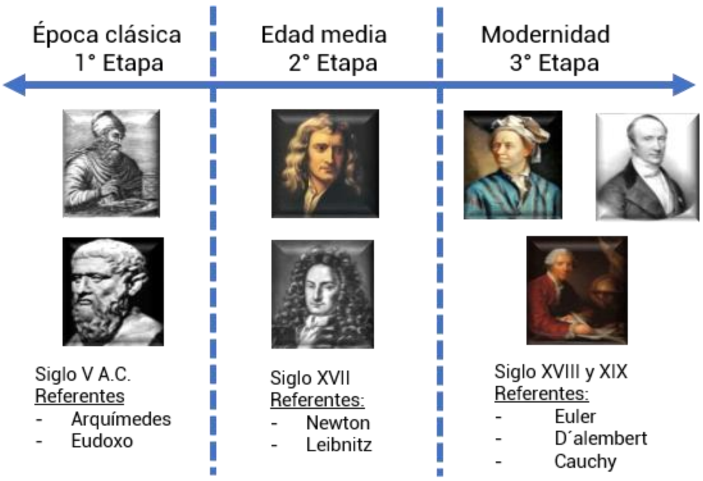


Fig. 52.: Evolución histórica del concepto de límite.

Por último, en una tercera etapa, durante el siglo $XVIII$ y XIX, se desarrolla la fundamentación del análisis infinitesimal. Referentes de este último período son Leonard Euler (1707-1743), Jean Le Rond

LA PARADOJA DE ZENÓN

Según esta paradoja, el más rápido de los hombres, Aquiles, no podrá alcanzar nunca al más lento de los animales, la tortuga, si se da a ésta una ventaja inicial en una carrera. Pues, mientras Aquiles recorre el camino que la tortuga llevaba por la mencionada ventaja inicial, la tortuga habrá recorrido otra porción, aunque más pequeña. Cuando Aquiles haya llegado a recorrer esta última porción de camino, la tortuga habrá avanzado otra porción más pequeña, y así la tortuga llevará siempre la ventaja hasta en espacios infinitamente pequeños, con lo cual, Aquiles no podrá alcanzarla nunca.
Lo relevante para nosotros, es que, la falsedad de esta paradoja puede ser demostrada matemáticamente a través del concepto de límite.

D´alembert (1717-1783) y Augustin Cauchy (1789-1857), este último arroja una de las primeras elaboraciones teóricas como definición de límite. La definición de límite que propone Cauchy (1821) es la siguiente: *"[...]cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás".*

3.1 Definición de Límite de una Función

Noción intuitiva de Límite

La aplicación de los límites es en su mayoría implícita, pero está más presente de lo que pensamos, ya que cuando intentamos predecir un cambio en algún sistema, por ejemplo, financiero, aplicamos la idea de límite para ver hacia donde tiende la evolución de la cotización de las acciones. La manera más fácil de analizarlos es mediante una gráfica ya que podemos ver cómo se van comportando las variables y así hacer una predicción. Mediante el uso de límites podremos indagar sobre el valor al que se aproxima una función.

En el siguiente link, encontrarás el primer video explicativo del concepto de límite de una función: https://youtu.be/IBM29FUwA1g

El concepto de límite en "**palabras**" consiste en acercarse lo máximo posible a un valor de la variable independiente y examinar que efecto produce sobre los valores de la función.

En otras palabras, el límite de una función es el valor al cual tiende $f(x)$, cuando x se acerca al valor c.

En símbolos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Previo a la formalización del concepto de límite, se te plantea el siguiente interrogante: ¿Cómo crees que será posible acercarse a un valor de la variable independiente sin llegar a alcanzarlo?

....

....

....

....

....

....

....

Los límites se utilizan a diario en la producción, ya que para generar bienes y servicios se cuenta con recursos que la mayoría de las veces son limitados; es decir, se tiene determinada cantidad de ellos, los cuales se deben aprovechar lo mejor posible para que la productividad de la empresa se incremente llegando a su nivel óptimo.

Representaciones del concepto de límite:

Para abordar el concepto de límite, se trabajan distintas representaciones (tablas, gráficas, expresiones algebraicas). Se introduce la idea intuitiva de aproximación del límite por derecha y por izquierda, primero con una tabla de valores y con la gráfica de la función para luego, aplicando las propiedades de los límites, calcular los mismos en forma algebraica a partir de la expresión analítica de f .

Desde la interpretación de los siguientes ejemplos las palabras "***tiende a*** , "$\boldsymbol{f(x)}$ ***se acerca arbitrariamente a L***", "$\boldsymbol{x}$ ***se aproxima a c***" comenzarán a tomar significado.

A continuación, veamos dos ejemplos:

1. En un primer ejemplo, dada la función: $f(x) = x^2 - x + 2$ cuyo dominio es $Dom\ f = \mathbb{R}$, se analiza el comportamiento de la función f para valores de $\boldsymbol{x}$ cercanos a 2**.**

En la Tabla N°13, se calculan los valores de $f(x)$ para valores de $\boldsymbol{x}$ cercanos a $x = 2$, pero no iguales a 2.

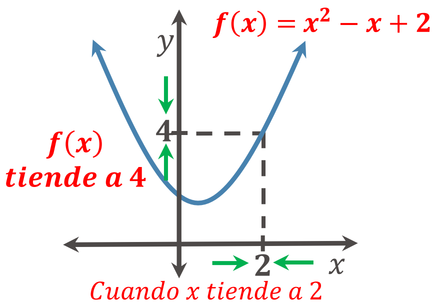


Fig. 53.: Gráfica de $f(x) = x^2 - x + 2$

x	$f(x)$
1,0	2,000000
1,5	2,750000
1,8	3,440000
1,9	3,710000
1,95	3,852500
1,99	3,970100
1,995	3,985025
1,999	3,997001
Se reflejan los valores de la función para $x < 2$, se denomina acercamiento por izquierda o x tiende a 2 por izquierda	

x	$f(x)$
3,0	8,000000
2,5	5,750000
2,2	4,640000
2,1	4,310000
2,05	4,152500
2,01	4,030100
2,005	4,015025
2,001	4,003001
Se reflejan los valores de la función para $x > 2$, se denomina acercamiento por derecha o x tiende a 2 por derecha	

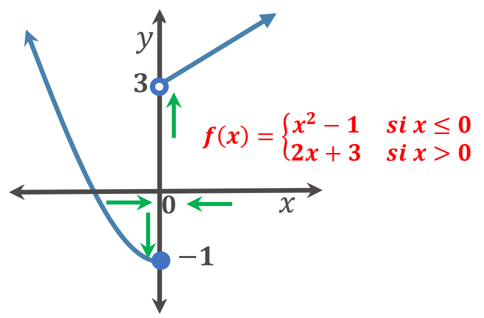
Tabla N°13

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la Fig. 53, es claro que cuando x se acerca a 2 (por izquierda o por derecha de 2), $f(x)$ se aproxima a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como se desee. La notación matemática para expresar esta situación es:

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x + 2 = 4$$

2. Veamos otro ejemplo, dado $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 0 \\ 2x + 3 & si\ x > 0 \end{cases}$

cuyo dominio es $Dom\ f = \mathbb{R}$



En este caso si nos acercamos a cero por **izquierda** (tomando valores menores a cero), la función tiende a -1 y si nos acercamos a cero por **derecha** (tomando valores mayores a cero), la función tiende a 3, entonces el límite de la función no existe.

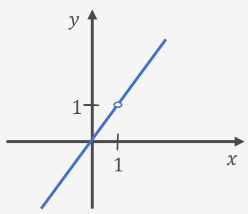
$$\lim_{x \to 0} f(x)\ no\ existe$$

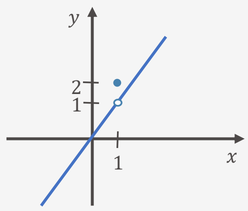
Fig. 54.: Representación gráfica del límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0

Observación:

- ✓ Si $f(x)$ se acerca a L, cuando x se acerca a c siendo $x \neq c$, a ese valor L lo llamamos el límite de la función cuando x tiende a c. $(x \to c)$.
- ✓ Si $f(x)$ tiende a valores distintos según nos acerquemos a c, por izquierda o por derecha, la función $f(x)$ no tiene límite.

Si el límite de una función $\boldsymbol{f(x)}$ cuando x tiende a c, existe, no necesariamente es igual al número $f(c)$, incluso en $f(c)$ puede no estar definida.
Por ejemplo:





3.1.1 DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

Intuitivamente ya se analizó el significado de:

$$“\boldsymbol{f(x)\ se\ acerca\ arbitrariamente\ a\ L}”\quad y\ de\quad “\boldsymbol{x\ se\ aproxima\ a\ c}”.$$

Ahora bien, la primera persona en asignar un significado matemático riguroso a estas dos frases fue Augustin-Louis Cauchy:

El concepto de límite **“formalmente”** se define de la siguiente manera:

Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente en c) y L un número real. Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c, es L.

En símbolos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si:

$$0 < |x - c| < \delta,$$

entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Las letras griegas ε (épsilon) y δ (delta) se utilizan para representar números positivos arbitrariamente pequeños.

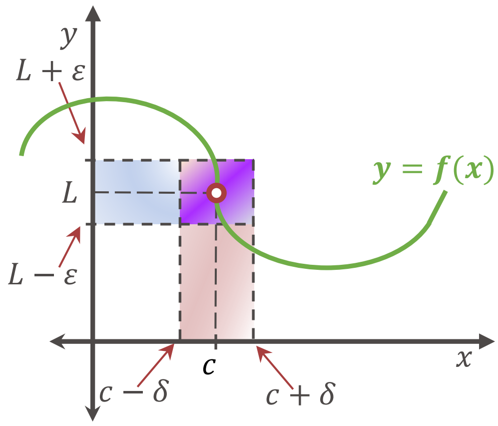


Fig. 55.: Gráfica de $f(x)$

- ✓ $|x-c|$ es la distancia desde x hasta c
- ✓ $|f(x)-L|$ es la distancia desde $f(x)$ hasta L
- ✓ La distancia entre el valor que asume x y c es posible expresarla como $|x-c|<\delta$, donde esta expresión equivale al par de desigualdades: $c-\delta<x<c+\delta$.
- ✓ A partir del punto anterior concluimos que los valores de x están dentro de un intervalo $(c-\delta; c+\delta)$.
- ✓ También se puede afirmar que $0<|x-c|$, ya que la misma representa una medida de distancia y la misma es verdadera si y solo si $x-c\neq 0$, es decir $x\neq c$.
- ✓ De manera similar la desigualdad $|f(x)-L|<\varepsilon$, equivale al par de desigualdades $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$, restando L en los tres miembros, nos queda:

$$-\varepsilon < f(x) - L < +\varepsilon .$$

Por lo tanto, en términos de intervalos, la definición formal $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ quiere decir que **para todo $\varepsilon>0$ (sin que importe lo pequeño que sea ε) es posible encontrar una $\delta>0$ tal que si x esta en $(c-\delta; c+\delta)$ y $x\neq c$, entonces $f(x)$ queda en el intervalo $(L-\varepsilon; L+\varepsilon)$.**

A continuación, observa la gráfica de $f(x)$, y determina gráficamente $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$:

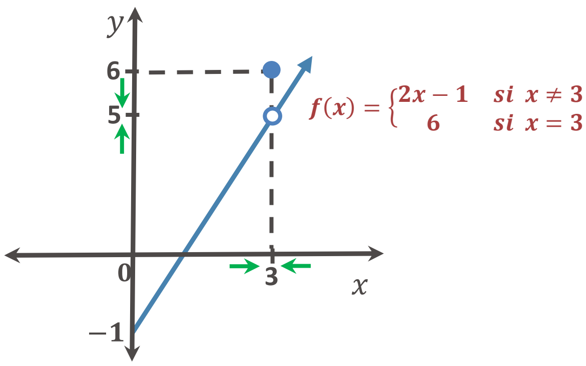


Fig. 56.: Representación gráfica de $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Puedes observar el Gif a través del siguiente Link: https://bit.ly/2yr4yKN

Para trabajar con el concepto de **valor absoluto y desigualdades**, puedes consultar en el **Capítulo N°0.**

Resolución

Al analizar la gráfica de la función, cuando x se acerca a 3, sin llegar nunca a asumir dicho valor, $f(x)$ está cada vez más cerca de 5 y de este modo concluir que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

3.2 Propiedades de los límites:

Para investigar el límite de una función, se dispone de distintos procedimientos algebraicos, el uso de tablas y el análisis del comportamiento gráfico de una función.

El procedimiento algebraico, también llamado paso al límite, es un procedimiento que permite el cálculo del límite en forma rápida y segura.

Encontrar el límite algebraicamente consiste en sustituir el valor de $x = c$ en $f(x)$ y determinar $f(c)$. Este procedimiento es una forma válida de calcular el límite de muchas funciones, pero no de todas.

Para encontrar el límite de una función algebraicamente se utilizan las propiedades que se detallan a continuación.

Supongamos que k es una constante y que los límites $\lim_{x \to c} f(x)$ y $\lim_{x \to c} g(x)$ existen, entonces:

1. Si $f(x) = k$ es una función constante, entonces el $\lim_{x \to c} k = k$

2. El $\lim_{x \to c} x^n = c^n$, para cualquier entero positivo n.

3. $\lim_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$

El límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia, respectivamente, de los límites.

4. $\lim_{x \to c}[f(x).g(x)] = \lim_{x \to c} f(x). \lim_{x \to c} g(x)$

El límite de un producto es el producto de los límites.

5. $\lim_{x \to c}[kf(x)] = k \lim_{x \to c} f(x)$

El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

6. $\lim_{x \to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ siempre que $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

El límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

El concepto de límite de una función, a medida que la variable independiente se aproxima a un valor determinado, se interpreta en palabras de la siguiente manera: **"Consiste en acercarse lo máximo posible – tanto por derecha como por izquierda – a un valor específico de la variable independiente y examinar el efecto que esto produce sobre los valores de la función"**

A continuación, se resuelve algebraicamente el límite de la función $f(x) = (3.(x+2) - 4x)^2$ cuando $x \to 1$.

Resolución:

$$\lim_{x\to 1}(3.(x+2)-4x)^2 = (3.(1+2)-4.1)^2 = (3.3-4)^2 = 5^2 = 25$$

El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1, es $L = 25$

Luego, responde ¿cuáles son las propiedades aplicadas a la función $f(x) = (3.(x+2)-4x)^2$ para resolver el límite de una forma más sencilla y rápida?

....

....

....

3.3. Existencia de Límite

Límites Laterales

El concepto de límite de una función nos sirve para examinar el comportamiento de $f(x)$ a medida que la variable independiente tiende a acercarse a un valor, valor en el cual la función puede o no estar definida.

Ahora bien, cuando hablamos de la variable aproximándose a cierto valor x, vimos que esa aproximación puede realizarse tanto "por izquierda" como "por derecha".

Esta posibilidad de que la variable se aproxime a cierto valor del dominio por "ambos lados" da lugar a lo que se denomina **LÍMITES LATERALES.**

Se denomina **límite lateral** al valor al que tiende la función cuando x se aproxima a un valor determinado, por la izquierda o por la derecha.

Recordemos que el límite, de existir, debe ser un valor **único, finito y determinado**. Por ello, al comparar los límites laterales, debemos obtener el mismo valor, es decir, los límites laterales deben dar el mismo valor finito y determinado.

Si los límites laterales dan valores finitos y determinados pero distintos, el límite no existe

En Símbolos:

Límite lateral derecho:

$$LL^+ = \lim_{x\to c^+} f(x) = L_1$$

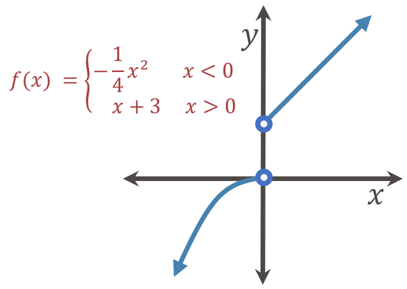
Límite lateral izquierdo:

$$LL^- = \lim_{x\to c^-} f(x) = L_2$$

Si $L_1 = L_2 = L$, se concluye que el **límite existe** y es igual a L.
Siendo L_1 y L_2 números reales
Esto es:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

Para determinar la existencia de límite, en las siguientes figuras, para cuando $x \to 0$ debemos analizar el comportamiento de la función en las cercanías de cero, tanto por derecha como por izquierda.



- Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, $f(x)$ se acerca al valor 3:
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 3 = 3$$
- Cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, $f(x)$ se acerca al valor 0:
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{4}x^2 = 0$$
- Puesto que: $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$

La función **no tiene límite**. O sea $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Fig. 57.: Función con límites laterales distintos

Ingresa al siguiente link para ver que sucede con la función cuando $x \to 1$ y escribe una conclusión.

https://ggbm.at/qqxcds5b

……

……

……

Límites infinitos

Si se observa el comportamiento de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, a medida que x se aproxima a cero, x^2 también se aproxima a cero y $\frac{1}{x^2}$ se hace muy grande. O sea $f(x)$ tiende a asumir valores muy grandes a medida que x se acerca a cero (tanto por izquierda como por derecha).

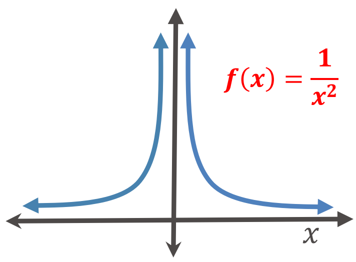


Fig. 58.: Función con límites

x	$\frac{1}{x^2}$
1	1
0,5	4
0,2	25
0,1	100
0,05	400
0,01	1000
0,001	10000

x	$\frac{1}{x^2}$
-1	1
$-0,5$	4
$-0,2$	25
$-0,1$	100
$-0,05$	400
$-0,01$	1000
$-0,001$	10000

Tabla N°14

Al calcular el límite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$
No significa que el límite existe, ya que ∞ no es un número real.

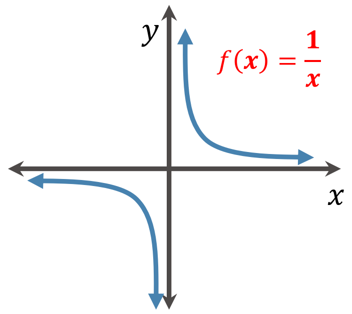
El comediante argentino **Tato Bores**, fallecido en 1996, hizo una brillante parodia que demuestra la obsesión de los argentinos por el dólar. *"El día que tengamos todos los dólares del mundo, iremos a los Estados Unidos con la guita [el dinero] de ellos y van a tener que entregarnos el país"*.
Con esta frase, intentó explicar que la tenencia de dólares para los argentinos **no tiene límite**.

Para indicar el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando x tiende a cero se expresa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Observemos ahora el comportamiento de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, tanto en la gráfica como en la tabla de valores, a medida que x se aproxima a cero, por derecha, $\frac{1}{x}$ toma un valor positivo grande y a medida que x se aproxima a cero, por izquierda, $\frac{1}{x}$ toma un valor negativo grande.

En este caso el límite **no existe** cuando x tiende a 0, $f(x)$ "crece infinitamente" o "tiende a infinito" o "tiene límite infinito". El valor 0 se excluye del análisis, ya que se analiza el comportamiento de la función cerca de 0.



x	$\frac{1}{x}$
1	1
0,5	2
0,2	5
0,1	10
0,05	20
0,01	100
0,001	1000

x	$\frac{1}{x}$
−1	−1
−0,5	−2
−0,2	−5
−0,1	−10
−0,05	−20
−0,01	−100
−0,001	−1000

Fig. 59.: Función con límites

Tabla N°15

Para indicar el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a cero por derecha se expresa:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

A su vez, para indicar el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x se aproxima a cero por la izquierda, se expresa:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Basta que al menos un límite lateral no exista (ya sea porque da $+\infty$ o $-\infty$) para afirmar que el limite no existe.

En este caso el valor 0 se excluye del análisis, ya que se analiza el comportamiento de la función cerca de 0.

El límite de una función $f(x)$ cuando $x \to c$ **NO EXISTE** si:

$f(x)$ se vuelve **INFINITAMENTE** grande en valor absoluto cuando x tiene a c desde cualquier lado.

En símbolos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

Límites en los que interviene infinito

Partiendo del ejemplo anterior, si quisiéramos calcular el límite para cuando x tiene a un valor infinitamente grande $(x \to +\infty)$, debemos resolver:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

Cuando x se hace muy grande, el denominador se hace muy grande también. Dividir 1 entre números muy grandes da como resultado números cercanos a 0. Esto puede observarse en la Fig. 59:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ahora, si quisiéramos calcular el límite para cuando x tiende a un valor infinitamente pequeño$(x \to -\infty)$, debemos resolver:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Otro caso, por ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{5-x}$$

Conforme x se vuelve negativamente infinita, $5-x$ se vuelve positivamente infinita. Como las raíces cuadradas de números grandes, son números grandes, se concluye que:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{5-x} = \infty$$

Para resolver un límite en el que la variable tiende a infinito **no se calculan los límites laterales.**

Indeterminaciones

En ocasiones, al calcular límites se encontrarán con ciertas expresiones cuyos valores no conocemos, las cuales en matemática se denominan **indeterminaciones**. La mayoría de ellas no se resuelven de un modo directo, sino que se deben realizar una serie de operaciones o cálculos para poder determinar su valor.

El cálculo diferencial nos proporciona un método muy efectivo y sencillo que se aplica, bajo ciertas condiciones: la **Regla de L'Hospital** que será desarrollada en el Capítulo N°6.

Las indeterminaciones son siete:

$$\boxed{\frac{0}{0}\,;\frac{\infty}{\infty}\,;\ \infty-\infty\,;\ \infty.0\,;1^{\infty};\ \infty^{0};\ 0^{0}}$$

En este capítulo sólo se trabajarán con las **indeterminaciones del tipo**: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; y algunos procedimientos que se pueden utilizar para resolverlas.

A continuación, se resuelve algebraicamente el $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

Recordando las propiedades de los límites podemos aplicar:

El límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^3-1}{x-1}\right]$$

Se realiza la operación de **paso al límite** que consiste en reemplazar en la expresión algebraica de $\boldsymbol{f(x)}$ a la variable $\boldsymbol{x}$ por el valor al cual tiende. De aplicar paso al límite, se observa que se presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^3-1}{x-1}\right] = \left[\frac{1^3-1}{1-1}\right] = \frac{0}{0}$$

Si se observa la expresión, los dos términos del numerador son cubos perfectos, por lo tanto, se aplican las técnicas de factorización para reexpresar dicho polinomio:

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^3-1}{x-1}\right] = \lim_{x \to 1} \left[\frac{x^3-1^3}{x-1}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\,(x^2+x+1)}{(x-1)} =$$

Luego, se simplifica la expresión $(x-1)$ presente tanto en el numerador como en el denominador. El límite a resolver queda expresado:

$$\lim_{x \to 1} \; x^2+x+1 = 3$$

El límite de $\boldsymbol{f(x)}$ cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a $\mathbf{1}$, es $\mathbf{3}$ y se simboliza:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$$

DIFERENCIA DE CUBOS

Sea un polinomio de la forma (a^3-b^3), su forma factorizada será: $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Te proponemos que veas el siguiente ***video*** para recordar la **Regla de Ruffini**, en caso de que lo necesites.

El dominio de la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

$Dom\, f$: $\mathbb{R} - \{1\}$, esto nos muestra que la función no está definida en $x = 1$, sin embargo, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \exists$, es decir:

$f(1) no\ esta\ definida$ y el limite $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$

Hasta aquí se ha establecido que:

✓ El límite de una función $f(x)$ para cuando $x \to c$ **EXISTE** si se verifica que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{siendo } c \text{ y } L \text{ números reales.}$$

✓ El límite de una función $f(x)$ para cuando $x \to c$ **NO EXISTE** si:

1. Si el límite es $+\infty$ o $-\infty$,es decir: $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \nexists$
2. Uno de los límites laterales es $+\infty$ o$-\infty$
3. Los límites laterales son finitos y distintos, *es decir:*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to c^+} f(x) = L \\ \\ \lim_{x \to c^-} f(x) = M \end{cases} \Rightarrow LL^+ \neq LL^- \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \nexists$$

3.4 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 1: Resuelve los siguientes límites:

$i)$ $\lim_{x \to 8} \frac{x-5}{x^2-25}$

$ii)$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2-9}{(x+3)}$

$iii)$ $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x+3}$

$iv)$ $\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x(x+3)}$

$v)$ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x^2-1}$

ACTIVIDAD 2: Resuelve las siguientes actividades, aplicando propiedades de límite:

$i)$ $\lim_{x \to 3} 5$

$ii)$ $\lim_{x \to 4} x$

$iii)$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2-4}{x^3+1}$

$iv)$ $\lim_{x \to 1} (3+x^2)$

$v)$ $\lim_{x \to 2} 2.x^5$

$vi)$ $\lim_{x \to 4} 3x^2.(x+1)$

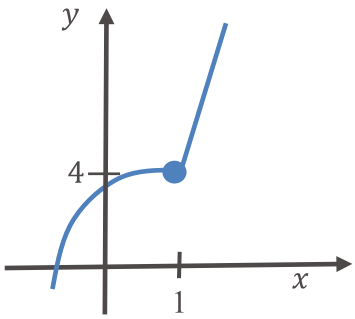
$vii)$ $\lim_{x \to 2} [3^x]^4$

$viii)$ $\lim_{x \to 6} \sqrt{3+x}$

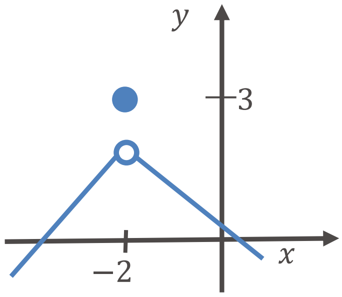
$ix)$ $\lim_{x \to 2} \frac{4}{x+1}$

ACTIVIDAD 3: Determina gráficamente el límite de las siguientes funciones:

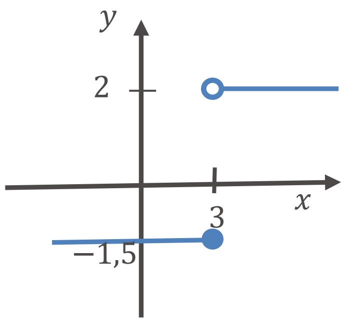
i) $\lim_{x \to 1} f(x)$



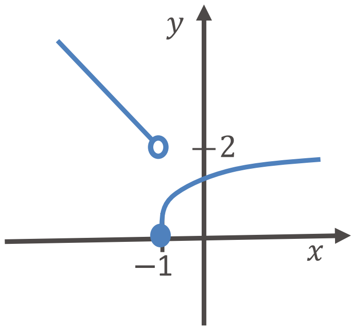
ii) $\lim_{x \to -2} f(x)$



iii) $\lim_{x \to 3} f(x)$

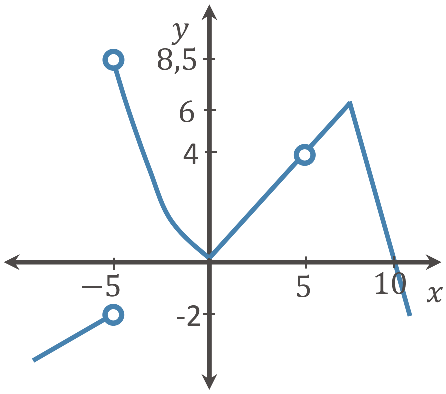


iv) $\lim_{x \to -1} f(x)$



ACTIVIDAD 4: Observa la figura de la función definida por segmentos y determina la existencia de límite para cuando:

$$x \to -5 \; ; x \to 0 \; ; x \to 5 \; ; x \to \infty ; x \to -\infty$$



ACTIVIDAD 5: Una empresa, dedicada a la venta de alimento para mascotas, busca liquidar las existencias de un alimento que ha quedado en stock hace meses. Para ello, se propuso establecer diferentes precios en función de los kg que pueda llegar a comprar el potencial consumidor.

De este modo, si un consumidor compra hasta 5 kilogramos, el precio de venta será de $\$6$, si el consumidor compra más de 5 kilogramos, el precio de venta será de $\$4$.

Lucas, el nuevo contador de la empresa, se propone modelizar matemáticamente los ingresos que ésta obtendrá por las ventas de estas existencias y concluye que la expresión algebraica que permite modelar los ingresos de la empresa en función a lis kilogramos vendidos es la siguiente:

$$I(x) = \begin{cases} 6x & si\ 0 \leq x \leq 5 \\ 4x & si \qquad x > 5 \end{cases}$$

Donde x representa los kilogramos de alimento vendidos e $I(x)$ el ingreso obtenido por la empresa. Se te solicita que:

a) Grafiques la función.
b) Halles el límite **lateral izquierdo** cuando x tiende a 5.
c) Halles el límite **lateral derecho** cuando x tiende a 5.
d) Compares los limites laterales y concluye sobre la existencia o no del límite de $\lim_{x \to 5} I(x)$.
e) Interpretes el resultado.

3.5 Asíntotas Horizontales y Asíntotas verticales

En este apartado se determinará cuándo una función tiene asíntotas verticales y/o asíntotas horizontales. Analizar el comportamiento asintótico de una función es muy útil para conocer las tendencias de f.

En el siguiente link, encontrarás el segundo video explicativo del concepto de Asíntotas de una función: https://youtu.be/Se65KJuQCo4

3.5.1 Definición de Asíntota Vertical

La recta $x = c$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de la función $f(x)$ si y solo sí, por lo menos se cumple uno de los siguientes enunciados:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \ o\ (-\infty)$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty \ o\ (-\infty)$$

La recta $x = c$ es la **ecuación de la asíntota vertical.**

Por ejemplo, si se considera la siguiente función racional:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Podemos observar que cuando $x = 2$, el denominador se anula ($x = 2$ no pertenece al dominio de f). Si x es ligeramente mayor que 2, entonces el denominador $(x-2)$ resulta cercano a cero y positivo. Así el valor que asume la función para cuando $x \to 2^+$ resulta ser:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

Si x es ligeramente menor que 2, entonces el denominador $(x-2)$ resulta cercano a cero y negativo. Así el valor que asume la función para cuando $x \to 2^-$ resulta ser:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Se concluye que la recta $x = 2$, es una asíntota vertical.

A continuación, observaremos esta situación gráficamente:

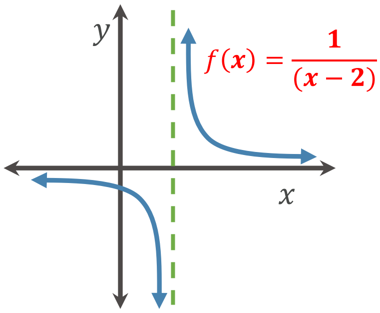


Fig. 60.: Función con asíntota vertical en $x = 2$

Regla de asíntotas verticales para funciones racionales:

Suponga que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. La recta $x = c$ es una asíntota vertical para la gráfica de f si y solo si $Q(c) = 0$ y $P(c) \neq 0$.

3.5.2 Definición de Asíntota Horizontal

Sea f una función no lineal. La recta $y = b$ es **asíntota horizontal** de la gráfica de f si y solo sí, por lo menos es verdadero uno de los siguientes enunciados:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \text{ ó } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

La recta $y = b$ es la **ecuación de la asíntota horizontal.**

Por ejemplo, si se considera la siguiente función exponencial: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

Podemos observar que cuando x tiende a tomar valores muy grandes, $f(x)$ se acerca a 1, o sea

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = 1$$

Se concluye que la recta $y = 1$, es una asíntota horizontal.

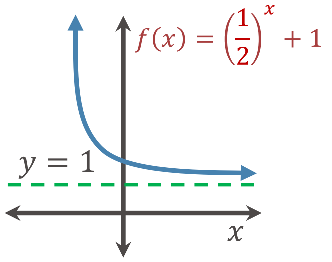


Fig. 61.: Función con asíntota horizontal en $y = 1$

En el **Capítulo N°2** en los **Puntos 2.6** y **2.8** se desarrollaron las características de la función exponencial y la función logarítmica, Ambas presentan asíntotas.

¿Qué tipo de Asíntota presenta toda función logarítmica no desplazada? Escribe la ecuación de la asíntota correspondiente.

……

……

………

3.5.3 Guía de Actividades Prácticas

<u>ACTIVIDAD 6</u>: Grafica las siguientes funciones y observe la existencia de asíntotas, indicando su ecuación.

$\boldsymbol{i)}$ $\quad f(x) = log(x - 2)$ $\qquad$ $\boldsymbol{iii)}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x} + 1$

$\boldsymbol{ii)}$ $\quad f(x) = 5^x + 1$ $\qquad$ $\boldsymbol{iv)}$ $\quad f(x) = x^2 + 2$

Puedes consultar el tema **Transformación de Funciones** en el **Punto 1.6** del **Capítulo N°1.**

<u>ACTIVIDAD 7</u>: Determina el límite de la siguiente función cuando $x \to 3$ y analiza la existencia de asíntotas, indicando su ecuación.

$$f(x) = \frac{3}{x - 3}$$

<u>ACTIVIDAD 8</u>: Determina el límite de la siguiente función cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$, luego analiza la existencia de asíntotas, indicando su ecuación.

$$f(x) = \frac{5}{1 + x^2}$$

3.6 Continuidad

En los capítulos anteriores estudiamos funciones en donde podíamos **graficarlas de un solo trazo**, como las polinómicas, las exponenciales y las logarítmicas. Mientras que otras, como las definidas por segmentos, cuando las graficamos podían presentar saltos o interrupciones. Esta idea, junto con la noción de límite nos llevara a comprender la continuidad de una función.

Si se analizan las siguientes funciones:

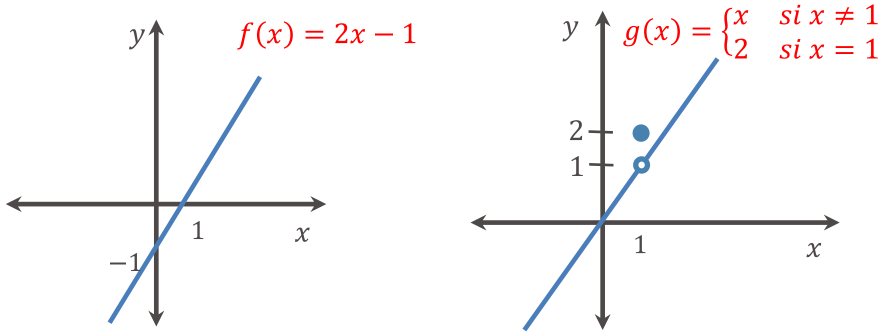


Fig. 62.: Funciones continuas y discontinuas

Viendo los gráficos de ambas funciones podemos observar que en el caso de $f(x)$, se trata de una función polinómica de grado 1 (es decir una función lineal) cuya gráfica es una línea recta la cual podemos trazar de manera continua.

En el caso de $g(x)$ nos encontramos con una función definida por segmentos. Gráficamente se observa que para el valor de abscisa $x = 1$ le corresponde un valor de ordenada $y = 2$, o sea, $g(1) = 2$. Es un punto que no está sobre la recta, por lo tanto, no se corresponde con una función continua.

Luego, en ambas gráficas el límite para cuando $x \to 1$, existe y es $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$.

Lo anterior nos lleva a una primera aproximación de la idea de continuidad.

3.6.1 Definición de continuidad en un punto

Una función $f(x)$ es continua en un valor $x = c$ si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(c)$ está definida.
2. El $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ exista.
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Si la función $f(x)$ **no verifica alguna** de estas condiciones se dice que la misma **no es continua** en $x = c$.

En el siguiente link, encontrarás el tercer video explicativo del concepto de Continuidad de una función: https://youtu.be/Cn08C0AYI9U

En nuestro ejemplo inicial podemos verificar la continuidad o discontinuidad de las funciones $f(x)\, y\, g(x)$ y de este modo ya no guiarnos de la intuición, si no fundamentar matemáticamente porque en un caso se trata de una función continua y en el otro de una función discontinua.

Verifica si las siguientes funciones, $f(x)$ y $g(x)$ son continuas cuando $x = 1$:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x & si\ x \neq 1 \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Resolución:

Para resolver esta consigna deberemos comprobar si se cumple la definición de **continuidad de una función en un punto**, lo cual implica que deberemos verificar el cumplimiento de las tres condiciones que componen la misma:

Continuidad de $f(x)$ cuando $x = 1$

1. $f(1) = 1$ está definida.
2. $\lim_{x \to 1} 2x - 1 = 2.1 - 1 = 1$ existe.
3. $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Por lo tanto, la función es CONTINUA en $x = 1$

Continuidad de $g(x)$ cuando $x = 1$

1. $g(1) = 2$ está definida.
2. $LL^+ = \lim_{x \to 1^+} x = 1$

   $LL^- = \lim_{x \to 1^-} x = 1$

   $LL^+ = LL^-$, entonces existe $\lim_{x \to 1} g(x) = 1$
3. $\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$ *pues* $1 \neq 2$

Por lo tanto, la función NO ES CONTINUA en $x = 1$.

Así como podemos evaluar la continuidad de una función en un punto, también es posible que determinemos si la misma es continua o no en un intervalo. En la siguiente sección, recordaremos las definiciones de intervalo abierto y cerrado, para luego abocarnos en definir formalmente qué es lo que entendemos por continuidad en un intervalo abierto y en un intervalo cerrado.

Si alguna de las condiciones de continuidad en un punto no se verifica, la función es **discontinua.**

3.6.2 Definición de continuidad en un intervalo

Una función es **continua en un intervalo abierto** $(a; b)$ si es continua en todo número que pertenezca al intervalo.

Una función es **continua en un intervalo cerrado** $[a; b]$ si es continua en el intervalo abierto $(a; b)$ y además:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

Un **intervalo abierto** $(a; b)$ incluye los valores comprendidos entre a y b sin incluir los extremos del intervalo, y un **intervalo cerrado** $[a; b]$ incluye los valores comprendidos entre a y b y también los extremos a y b.

Dada la función $f(x) = -x^2 + 4$ cuyo gráfico es:

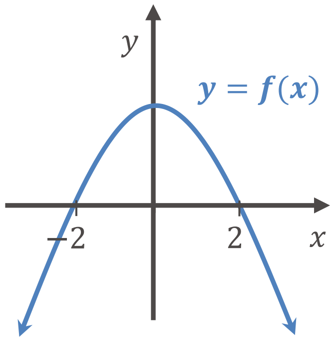


Fig. 63.: Función $f(x) = -x^2 + 4$

Analiza la continuidad de la función en el intervalo cerrado $[-2; 2]$.

Resolución: Al observar la Fig. 63, la función es continua en el intervalo que se desea analizar. Es decir, que si tomáramos cualquier valor de abscisa, dentro de del intervalo abierto $(-2; 2)$, por ejemplo, $x = 1$ deberíamos poder verificar que:

1. $f(1)$ está definida
2. $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

✓ Para verificar la continuidad de la función en el intervalo cerrado $[-2; 2]$ se deben verificar la continuidad en los extremos del intervalo, es decir:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \text{ y } \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

✓ Si se verifica la primera igualdad:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} -x^2 + 4 = 0$$
$$f(-2) = -(-2)^2 + 4 = 0$$

✓ Dado que ambas expresiones son iguales hemos comprobado que:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$$

La función:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x & si\ x > 0 \\ x^2 & si\ x \le 0 \end{cases}$$

Es un ejemplo de una función que presenta una **discontinuidad en su dominio.** A pesar de que la misma está definida para $\mathbb{R}$, la función es discontinua en $x = 0$.

En cambio, las funciones desarrolladas en el **Capítulo N° 2** son funciones **continuas en su dominio**.

✓ Si se verifica la segunda igualdad:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -x^2 + 4 = 0$$
$$f(2) = -(2)^2 + 4 = 0$$

✓ Dado que ambas expresiones son iguales hemos comprobado que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2).$$

La función **es continua en el INTERVALO cerrado** $[-2; 2]$.

3.6.3 Discontinuidades evitables y no evitables

Hasta ahora, hemos definido cuando una función es continua en un punto $(x = c)$ y también establecimos las condiciones que debe cumplir f, para ser continua en un intervalo. En este apartado trataremos de responder la siguiente pregunta:

¿Intuitivamente cuándo es discontinua una función?

………

………

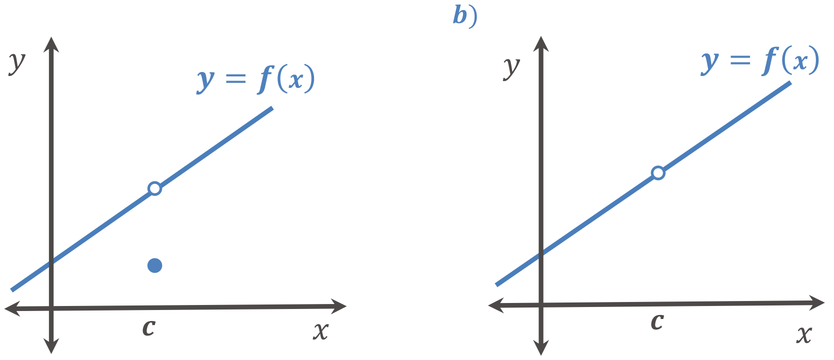
………

A partir de lo estudiado en este capítulo podemos decir que una función es discontinua en $x = c$ si no cumple con alguna de las condiciones de continuidad. Por ejemplo, que: $f(c)$ no este definida, que el $\lim_{x \to c} f(x)$ no exista o que el $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.

La distinción de estas diferentes situaciones, dan lugar a la clasificación de la discontinuidad de una función en: **Evitables y No Evitables.**

Una discontinuidad en $x = c$ es **evitable** si el $\lim_{x \to c} f(x)$ **existe**, solo que este valor no coincide con $f(c)$, Fig. 64 a) o $f(c)$no está definida, Fig. 64 b).

$a)$ $b)$



El $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y $f(c)$ está definida, pero $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

El $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y $f(c)$ no está definida.

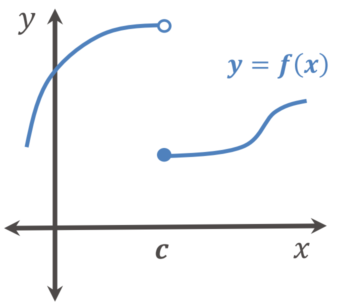
Fig. 64.: Casos de funciones discontinuas evitables

Recordar lo estudiado en el **Punto 1.6** del **Capítulo N° 1**, donde aprendimos que era posible combinar funciones a través de operaciones algebraicas y de este modo crear una nueva función.
Es posible también combinar funciones continuas para obtener una nueva función continua.

Mientras que, una discontinuidad en $x = c$ es **no evitable** si el $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe o da infinito. Esta **discontinuidad no evitable** puede ser clasificada en:

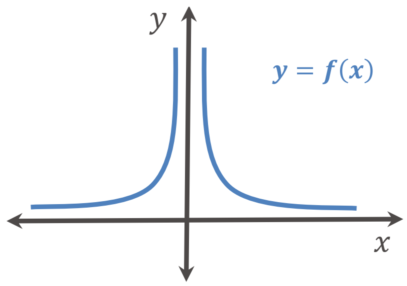
Discontinuidad no evitable de salto finito: la misma se produce cuando el $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe debido a que los límites laterales son finitos y distintos.

Discontinuidad no evitable de salto infinito: La misma se produce cuando al menos uno de los limites laterales, a medida que x se aproxima a c, asumen valores infinitamente grandes en valor absoluto.



El $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe, dado que los límites laterales son distintos.

***f* discontinua no evitable de salto finito**



El $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. Los límites laterales asumen valores infinitamente grandes en valor absoluto.

***f* discontinua no evitable de salto infinito**

Fig. 65.: Casos de funciones discontinuas no evitables

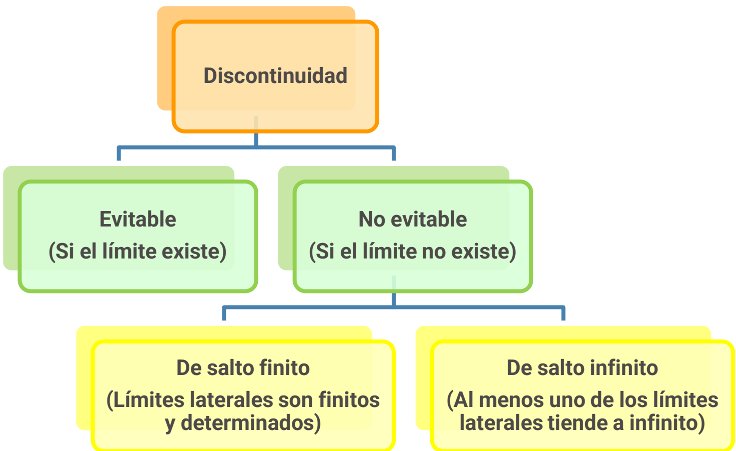


Fig. 66.: Clasificación de las discontinuidades

Se analizará la siguiente función para determinar si la misma es continua para cuando $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & si\ x \leq 0 \\ 3^x + 3 & si\ x > 0 \end{cases}$$

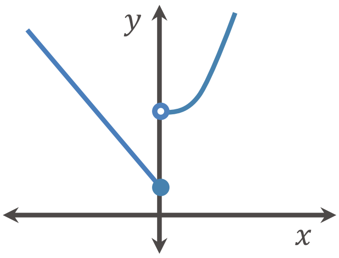


Fig. 67.: Función definida por segmentos

Se verifican las condiciones de continuidad de $f(x)$ cuando $x = 0$

1. $f(0) = 1$ está definida.
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 3^x + 3 = 3^0 + 3 = 4$

   $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -2x + 1 = -2.0 + 1 = 1$

   $4 \neq 1$, entonces **no existe** el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
3. 1) y 2) no son comparables

Por lo tanto, la función es **DISCONTINUA NO EVITABLE DE SALTO FINITO** en $\boldsymbol{x = 0}$


Se analizará la siguiente función y para determinar si la misma es continua para $x = 2$:

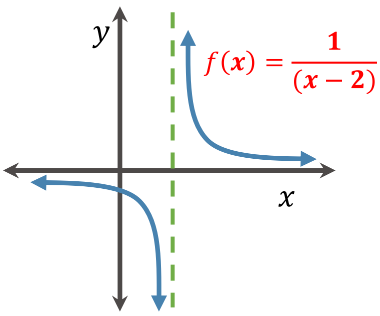


Fig. 68.: Función $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Resolución:

Se verifican las condiciones de continuidad de $y = f(x)$ cuando $x = 2$

1. $f(2)$ no está definida
2. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

   $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

   o sea:

   $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$
3. 1) y 2) no son comparables

Por lo tanto, la función es DISCONTINUA NO EVITABLE DE SALTO INFINITO en $x = 2$

3.6.4 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 9: Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ log_2(x+1) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Se te solicita que:

a) Grafiques la función.

b) Indiques simbólicamente su dominio e imagen a través de su gráfica.

c) Determines analíticamente si en $x = 0$ y en $x = 1$ la función es continua. Justifica la respuesta, indicando en caso de no serlo, qué condiciones de continuidad cumple la función y cuáles no.

ACTIVIDAD 10: Determina analíticamente si las siguientes funciones son continuas o discontinuas. En caso de ser discontinuas, clasifica el tipo de discontinuidad en el punto donde cambia el comportamiento de la función.

$\boldsymbol{i})$ $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x < 1\ y\ x \neq 0 \\ \sqrt{x+1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

$\boldsymbol{ii})$ $$r(x) = \begin{cases} log\, x & si\ x > 0 \\ -x^2 + 1 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{iii})$ $$h(x) = \begin{cases} x + 3 & si\ x > 5 \\ x^2 & si\ x = 5 \\ 8 & si\ x < 5 \end{cases}$$

$\boldsymbol{iv})$ $$j(x) = \begin{cases} e^x + 4 & si\ x \geq 0 \\ 5 + x & si\ x < 0 \end{cases}$$

3.7 Aplicaciones Económicas

Para abordar las aplicaciones en el campo de las ciencias económicas de los temas abordados en este capítulo, te proponemos resolver las siguientes actividades.

ACTIVIDAD 11: Si se sabe que el valor libro en dólares de un disco duro de una PC a través del tiempo t (en años) está dado por la función:

$$P(t) = \frac{250}{t+2}$$

Con la información disponibles, se te solicita que:

a) Determines el valor libro del artículo para el final de este año.
b) Calcules en qué año el valor libro será de $41.
c) Interpretes qué ocurrirá con el valor libro a largo plazo.

ACTIVIDAD 12: El costo de purificar agua está dado por $C(p) = \frac{50000}{p} + 65000$, donde p es el porcentaje de impurezas que quedan después del proceso de purificación. Con la información disponible, se te solicita que:

a) Determines a cuánto tiende el costo si se admite un agua totalmente impura.
b) Determines el $\lim_{p\to 0} C(p)$ y luego analices el significado de dicho límite.

ACTIVIDAD 13: Según la Ley de impuesto a las ganancias de un país, el impuesto a pagar por una empresa se calcula teniendo en cuenta que el mismo está compuesto por una parte fija y una parte variable, siguiendo los datos aportados por la siguiente tabla:

Ganancia neta sujeta a impuesto		Componente fijo	Alícuota (Componente variable)	Excedente sobre el cual se aplica la alícuota
Más de ($)	Hasta ($)			
$0	$20.000	$0,00	0%	
$20.000	$60.000	$0,00	12%	$20.000
$60.000	$100.000	$1.000	19%	$60.000
$100.000	$150.000	$2.800	27%	$100.000
$150.000	*En adelante*	$5.200	35%	$150.000

En base a los datos anteriormente expuestos, se te solicita que respondas:

a. ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?

Te proponemos que veas el siguiente ***video*** para recordar cómo se resuelve el **cociente de polinomios**, en caso de que lo necesites.

En el siguiente link, encontrarás el último video explicativo de aplicaciones económicas de los conceptos de límite y continuidad de una función: https://youtu.be/gjXSD-BWtPM

b. Determines la expresión algebraica de la función que representa el impuesto a pagar $T(x)$ y su gráfica.
c. ¿Es posible calcular a que valor tiende la función cuando la variable independiente tiende a 100000?
d. Analices la continuidad de la función $T(x)$, en $x = 60000$ y si es discontinua clasifíquenla. Justifiquen su respuesta.
e. ¿Qué sucede con el impuesto a pagar, si la empresa pasa de ganar $\$60000$ a ganar $\$60001$?
f. Analices que sucede con el impuesto a pagar si la ganancia neta de la empresa tiende a crecer de manera indefinida. ¿A qué concepto de los estudiados está relacionada esta pregunta?
g. Una empresa según su último balance determinó que su ganancia neta fue de $\$120000$. Actualmente está evaluando realizar una inversión que le proporcionará un incremento de $\$45000$ en su ganancia neta, ¿a cuánto asciende el real aumento en las ganancias de la empresa luego del impacto impositivo?

3.8 Esquema de Límite y Continuidad

Por último, como resumen de los conceptos abordamos en este capítulo, te presentamos un esquema conceptual que permite apreciar la relación entre límite, asíntotas (verticales y horizontales) y continuidad de una función.

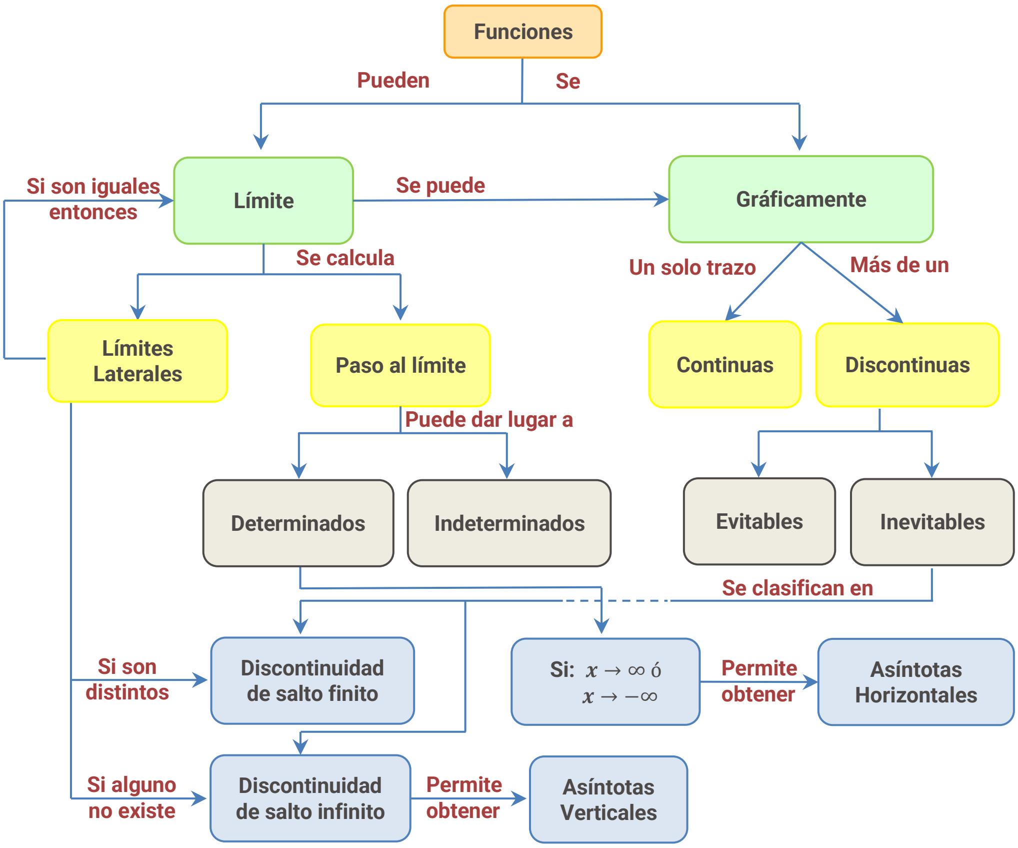


Fig. 69.: Mapa Conceptual Límite y Continuidad

CAPÍTULO Nº4:

DERIVADA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Objetivos:

Al finalizar este cuarto capítulo deberás ser capaz de:

- ✓ Definir el concepto de derivada de una función en un punto.
- ✓ Interpretar geométricamente el concepto de la derivada de una función en un punto.
- ✓ Calcular mediante reglas deducidas la derivada de una función.
- ✓ Describir la idea de tasa de variación media e instantánea y porcentual.
- ✓ Interpretar el concepto de funciones marginales en economía.

Contenidos:

4. La Derivada de Funciones de una Variable Independiente

En los capítulos anteriores hemos estudiado que una variable puede variar en función de otra surgiendo así el concepto de función, además analizamos y modelizamos las principales relaciones funcionales (**funciones lineales, funciones constantes**, **funciones cuadráticas**, **funciones exponenciales y funciones logarítmicas)**. Estos modelos nos permitieron representar situaciones que se presentan en las ciencias económicas de una forma simplificada, nos facilitaron su comprensión y nos posibilitó tomar decisiones. Luego, abordamos los conceptos de límite y continuidad, necesarios para avanzar hacia el **Cálculo Diferencial** que nos introduce al estudio de la rapidez en que se producen los cambios en las funciones cuando se produce un cambio infinitesimal en la variable independiente, siendo su principal objeto de estudio la **derivada.**

En este capítulo nos abocaremos al estudio de la derivada, para abordar estos conceptos se deberá tener presente los conocimientos aprendidos en los capítulos anteriores, en cuanto a funciones y sus expresiones analíticas, tasa de cambio, pendiente de una recta, nociones de infinito, incrementos absolutos, límite de funciones y continuidad.

Al abordar el concepto de derivada de una función, se analizará el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable tiende a cero y se identificará la pendiente de la recta tangente a la función en un punto. Dada la función a partir de las reglas de derivación, se obtendrá su función derivada y a partir de ella, se calculará el valor de la derivada de la función en un punto.

Luego, a partir de situaciones sencillas que se presentan en la vida diaria, se comenzará midiendo el grado de intensidad de la variación de una variable con respecto a otra. Además, para contextualizar en situaciones de la práctica profesional, introduciremos ejemplos que nos permitirá valorar la utilización de esta nueva herramienta, para ello trabajaremos con funciones de costo, ingreso, beneficio, etc.

Al finalizar este capítulo, el estudiante será capaz de valorar la importancia de la derivada en el análisis de funciones y su utilidad en las ciencias de la administración. Esta herramienta matemática es un excelente instrumento, para la toma de decisiones, para el cálculo de la elasticidad de funciones y es un conocimiento fundamental para abordar el estudio de los valores máximos y mínimos que asumen las funciones, tema que será desarrollado en el próximo capítulo.

Además, presentaremos guías de actividades prácticas y una actividad integradora de aplicación con las que se trabajarán los principales conceptos del capítulo.

UN POCO DE HISTORIA

Gottfried Leibniz (1646-1716) Isaac Newton (1642-1727)

Leibnitz y Newton desarrollaron una herramienta que cambió la historia. Se los considera: **"los padres del cálculo"**. En el siglo XVII, a partir de sus descubrimientos, se abandona la idea de un mundo estático y se comienza a estudiar y a describir fenómenos en movimiento.

En el siglo XVII a partir de los descubrimientos de Leibnitz y Newton se abrieron las puertas a una nueva mirada de la realidad, lo que dando origen a lo que en matemática moderna llamamos: **El Cálculo**.

4.1 Definición

Antes de continuar con la lectura, te proponemos que observes las gráficas de las siguientes funciones e indiques **¿cuál de ellas cambia más rápidamente?**

El concepto de derivada está ligado a la existencia de cambios infinitesimales en la variable independiente.

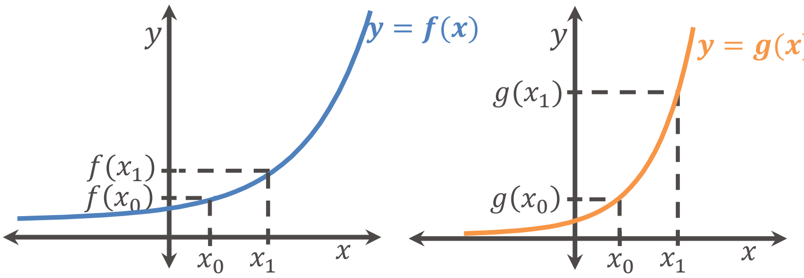


Fig. 70. Funciones con diferentes ritmos de cambio

En ambas gráficas, considerando el intervalo $[x_0; x_1]$, se puede observar que la función $g(x)$cambia más rápidamente que $f(x)$.

Si observamos la Fig. 70, podemos advertir que al incrementarse una unidad la variable independiente, la variable dependiente se incrementa en 3 unidades. Ambas funciones sufren el mismo cambio en la variable independiente, una unidad, pero el cambio que se produce en $f(x)$ es imperceptible al comienzo de su recorrido y luego lo hace más rápido en el tramo final, mientras que en la gráfica de $g(x)$, se puede observar que su ritmo de cambio es constante, ya que es una función de tipo lineal.

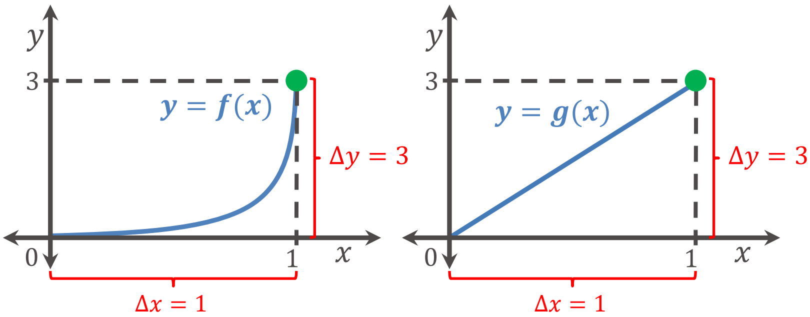


Fig. 71. Cambio promedio de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en $[0; 1]$

Por lo tanto, el cambio que ocurre en una función, si solamente se analizan los extremos del intervalo (en nuestro caso $x = 0$ y $x = 1$), puede no ser informativo del cambio que ocurre en los valores comprendidos dentro del intervalo.

¿Cómo medimos ese ritmo de cambio?

En funciones lineales, cuanto mayor es la pendiente $\boldsymbol{m}$ de la recta, más rápido es el crecimiento o decrecimiento de la función. Además, esa variación será constante en todo el intervalo y el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ medirá exactamente el cambio de $\boldsymbol{y}$ con respecto al cambio de $\boldsymbol{x}$. En la figura 72, se representan las gráficas de dos funciones lineales con distintas pendientes.

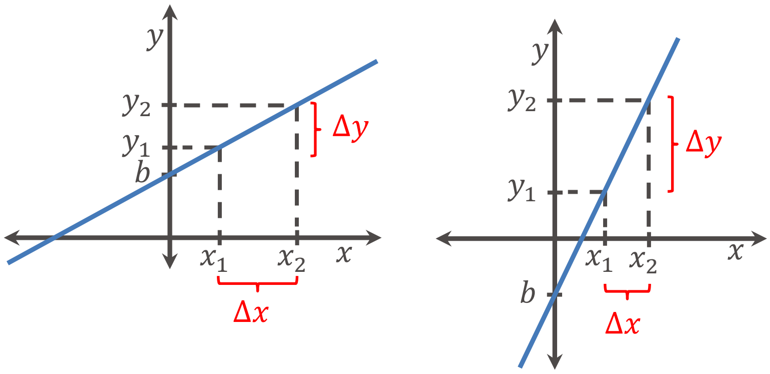


Fig. 72. Incrementos Absolutos

En este capítulo aprenderemos a calcular estas variaciones en funciones no lineales.

Para poder **MEDIR LA RAPIDEZ DE CAMBIO** de una variable con respecto a la otra, tendremos que referirnos a lo que varía "y" con relación a la variación de "x", es decir, deberemos analizar las **VARIACIONES RELATIVAS**.

Tasa de Variación Media $(\boldsymbol{T.V.M})$ - Incrementos Relativos:

Cuando **relacionamos los incrementos**, para medir cuánto varía una variable con relación a la variación de la otra, obtenemos **Variaciones Relativas**. Como Δy expresa el cambio en la función, y Δx el cambio en la variable independiente, su **cociente** informa acerca de cuánto **está cambiando <u>en promedio</u> la función por cada unidad de variación de la variable independiente.**

En símbolos: La variación de $\boldsymbol{y}$ con respecto $\boldsymbol{x}$:

$$T.V.M. = \frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

En la siguiente figura se representa el cambio que ocurre en la función, frente a un cambio en la variable independiente:

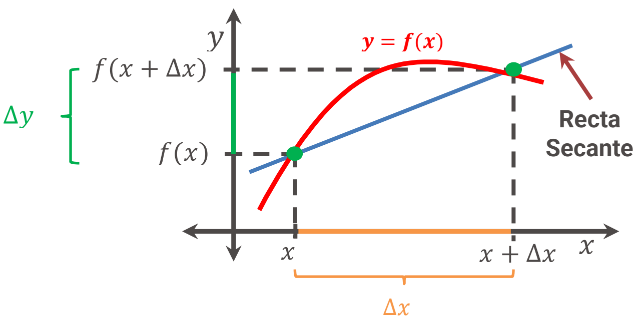


Fig. 73.:Relación TVM y Recta Secante

Cuando establecemos la **VARIACIÓN** o **INCREMENTO** de $\boldsymbol{y}$ ó de $\boldsymbol{x}$ por separado nos referimos a **Incrementos Absolutos** de $\boldsymbol{y}$ ó de $\boldsymbol{x}$, simbolizados por Δy ó de Δx respectivamente:

En símbolos: Sí $\boldsymbol{y}$ varía de $\boldsymbol{y_1}$ a $\boldsymbol{y_2}$, el **Incremento Absoluto de la Función** es:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Sí $\boldsymbol{x}$ varía de $\boldsymbol{x_1}$ a $\boldsymbol{x_2}$, el **Incremento Absoluto de la Variable independiente** es:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Una **Recta Secante** es aquella recta que corta a la curva en dos puntos de coordenadas conocidas. Dado dos puntos de coordenadas conocidas $(x; f(x))$ y $(x+\Delta x; f(x+\Delta x))$, entonces la pendiente de recta secante viene dada por:

$$m_{sec} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Previo a continuar la lectura del capítulo, nos interesa que respondas al siguiente interrogante. ¿Qué relación existe entre la **Tasa de Variación Media**$(T.V.M)$y la **Pendiente de la Recta Secante a la Curva**?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

La **tasa de variación media**$\left(T.V.M = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ en funciones lineales o no lineales, nos permite obtener un **“promedio”** de la variación de una función respecto de la variable en el intervalo$[x; x + \Delta x]$.

Es válido advertir que:

Geométricamente la **tasa de variación media**$(\boldsymbol{T.V.M})$ de una función es la **pendiente de la recta secante**$(\boldsymbol{m_{sec}})$ y mide el **cambio promedio** de la función en el intervalo$[x; x + \Delta x]$:

$$T.V.M_{[x;x+\Delta x]} = \frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

¿Qué sucede cuando el intervalo en que se analiza el cambio promedio tiende a ser cada vez más pequeño?

Para contestar este interrogante, te proponemos que observes la gráfica de la Fig. 74:

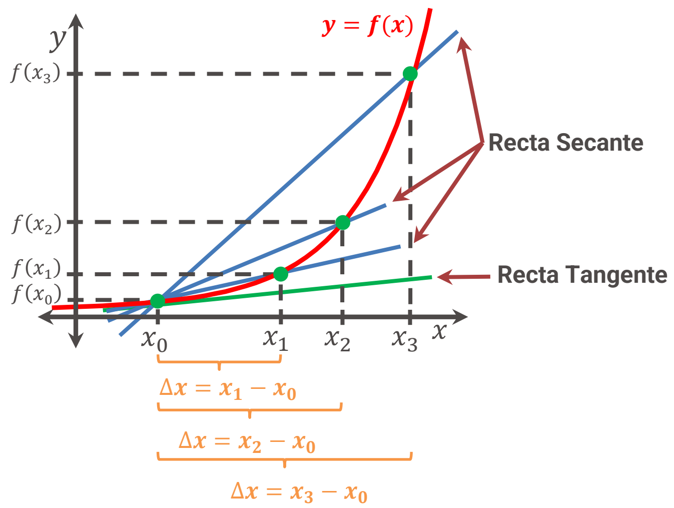


Fig. 74. Relación Tasa de Variación Instantánea y Recta Tangente

Las **rectas secantes** tienden a la **recta tangente** cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Si hacemos Δx muy pequeño (haciendo que tienda a cero), obtenemos una información más precisa de lo que ocurre en el punto de abscisa $x = x_0$. Pues bien, cuando hacemos $\Delta x \to 0$ en la tasa de variación media, llegamos al concepto de tasa de variación instantánea.

Previo a continuar la lectura del capítulo, nos interesa que respondas al siguiente interrogante. ¿Qué relación hay entre la **tasa de variación instantánea** y la **pendiente de la recta tangente a la curva**?

………

………

……………………………………………………………………………………………………

Tasa de Variación Instantánea (T.V.I):

La **tasa de variación instantánea** ($\boldsymbol{T.V.I}$) nos permite obtener la variación de una función en un punto $x = x_0$ dentro de un intervalo $[x_0; x_0 + \Delta x]$ cuya amplitud es infinitesimal.

En símbolos: La variación instantánea de $\boldsymbol{y}$ con respecto $\boldsymbol{x}$:

$$T.V.I. = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por ello decimos que la pendiente de la recta tangente mide el cambio instantáneo de la función en un punto.

Geométricamente la $\boldsymbol{T.V.I}$ de una función es la **pendiente de la recta tangente** y mide el **cambio instantáneo** de la función en el punto $x = x_0$.

$$\boldsymbol{mtg} = T.V.I. = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La **pendiente de la recta tangente** es la limitante de las **pendientes de las rectas secantes,** cuando $\Delta x \to 0$, es decir:

$$m_{tg} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec}$$

En el siguiente link se presenta la gráfica de la función derivada y la recta tangente:

https://www.geogebra.org/m/bkhk68ca

Lo abordado precedentemente en relación: a los diferentes ritmos de cambio de las funciones, las tasas de variación media e instantánea, las pendientes de las rectas secantes y de las tangentes en las gráficas y la existencia de límite, lleva a **formalizar el concepto de derivada de una función en un punto $\boldsymbol{x = x_0}$**.

4.1.1 Definición derivada de la función en un punto

Definición de derivada de una función en un punto:

Sea $\boldsymbol{f}$ una función de variable real y sea $x = x_0$ un punto de su dominio, la derivada de $\boldsymbol{f}$ en x_0 , se denota como $\boldsymbol{f'(x_0)}$ y se define como:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Es la variación instantánea o ritmo de cambio de $f(x)$ en $x = x_0$, siempre que el límite exista.

Si se presta atención nuevamente a las funciones con las que empezamos a trabajar en el capítulo, podemos observar que la **tasa de variación media**: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos permite calcular la **variación promedio** en el intervalo $[0; 1]$ mientras que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos permite calcular el **cambio instantáneo** en la variable dependiente por acción de un pequeño cambio (infinitesimal) en la variable independiente, en otras palabras, cuando se toma límite a la $T.V.M$ para $\Delta x \to 0$ (tendiendo a cero), se determina la $T.V.I$ de la función en algún punto, x_0, del intervalo.

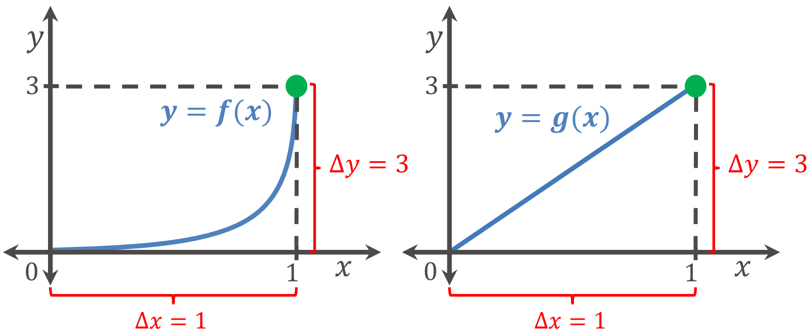


Fig. 75. Ritmos de Cambio

El concepto de derivada está ligado a la existencia de límite. Permite ver a través de la pendiente de la recta tangente a la curva, **la evolución o el cambio** de la función en todo punto de su dominio para el que la función sea derivable.
Retomaremos este concepto cuando abordemos el **Punto 4.1.3 "Derivabilidad y Continuidad en un punto $x = x_0$"**.

4.1.2 Interpretación Geométrica

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto:

Geométricamente, la derivada de una función en un punto de su dominio $x = x_0$ es la **pendiente de la recta tangente en el punto** $(\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{f(x_0)})$.

Cuando hablamos de derivada, de una función $f(x)$ en un punto $x = x_0$, podemos calcularla:

- ✓ Analíticamente hallando el $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, siempre que ese límite exista.
- ✓ Geométricamente, calculando la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $x = x_0$.

En la Fig. 76, se realiza la representación de la recta tangente $(RT(x))$ a la curva para el punto $(x_0; f(x_0))$. Adicionalmente se representa el incremento absoluto para el intervalo $[x_0; x_0 + \Delta x]$ y el incremento en la recta tangente para el mismo intervalo considerado $(\Delta RT(x))$.

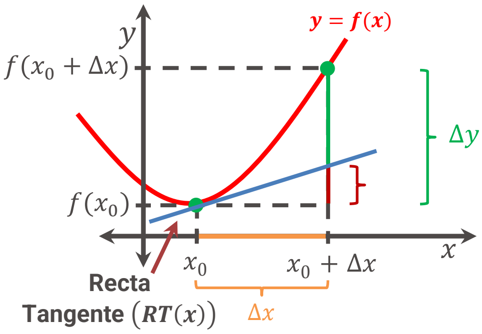


Fig. 76. Representación Geométrica de la derivada

Para finalizar la lectura de este punto y previo a que realices las actividades prácticas, deseamos que trates de dar respuesta a dos interrogantes que te servirán para abordar próximas temáticas que se desarrollarán en el material.

¿Cuáles son los tipos de funciones en las que la recta tangente coincide con la recta secante para un intervalo $[x_0; x_0 + \Delta x]$?

....

....

....

Retomaremos este concepto cuando abordemos el **Punto 4.3.2 "Análisis Marginal en Economía"** y el **Punto 5.9 "Diferencial de una Función"**.

¿Es posible que, para el intervalo $[x_0; x_0 + \Delta x]$, el incremento en la recta secante coincida con el incremento en la recta tangente?

....

....

....

....

En el siguiente link se presenta el cálculo de la tasa de variación media y de la tasa de variación instantánea de $f(x)$.

https://ggbm.at/gp72ufxr

4.1.3 Derivabilidad y continuidad en un punto $x = x_0$

Como ya hemos estudiado en puntos anteriores, el cálculo de la derivada en un punto $x = x_0$, viene dado por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Siempre que este límite exista. Si $f'(x_0)$ puede encontrarse (quizá no todas las $f'(x)$ puedan encontrarse), se dice que f es derivable en x_0, y $f\,'(x_0)$ se llama derivada de f en x_0, o derivada de f con respecto a x en x_0. El proceso de encontrar la derivada se llama diferenciación

Pero si el límite de $y = f(x)$ no existe entonces, tampoco existirá la derivada. Si observamos la figura 77, es un ejemplo de una función que no es continua en $x = 3$ dado que el límite de esta no existe, $\lim_{x \to 3} f(x) = \nexists$, por lo tanto no es derivable.

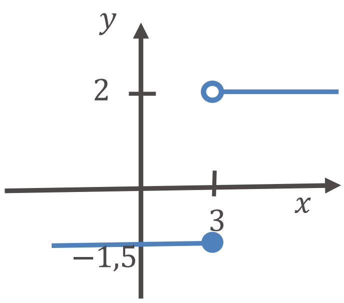


Fig. 77.: Representación gráfica de una función cuyo límite no existe.

Analicemos ahora dos casos que pueden presentarse en los que **la función es continua en el punto $x = x_0$** pero no es derivable en dicho punto.

Punto Cúspide:

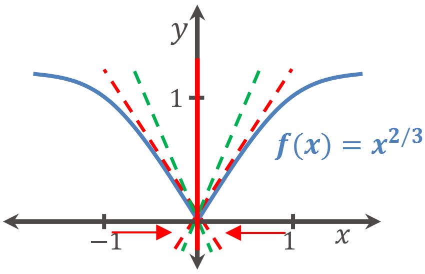


Fig. 78.: Representación gráfica de una función que presenta en $x = x_0$ un **Punto Cúspide**

Dado que la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada de la función en ese punto y que en este caso la recta tangente es una **recta vertical**, no es posible calcular la pendiente de la recta tangente dado que la misma no existe. Se concluye entonces que **la derivada no existe** en dicho punto, de allí que se afirma que la función $y = f(x)$ **NO ES DERIVABLE** en $x = 0$.

Punto Anguloso:

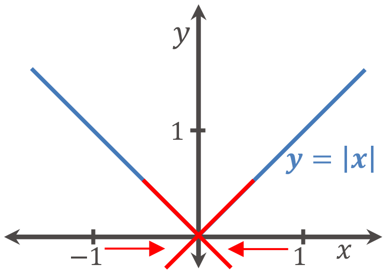


Fig. 79.: Representación gráfica de una función que presenta en $x = x_0$ un **Punto Anguloso**

Una función es derivable o diferenciable en un punto $x = x_0$ si:
Es **continua** en: $x = x_0$ y **no presenta puntos angulosos** o **puntos cúspides**.

Como la **Recta Tangente no** puede ser **determinada unívocamente, la pendiente tampoco es única**. Y dado que la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en dicho punto, se concluye que **la derivada no es única**, de allí que se afirma que la función $f(x)$, **NO ES DERIVABLE** en $x = 0$.

A continuación, te presentamos tres conclusiones que son importantes tener presente para el estudio de la asignatura:

1. Una función es derivable en un punto $x = x_0$, si es continua en ese punto y no presenta puntos angulosos o puntos cúspides en dicho punto.
2. Si una función f, no es continua en $x = x_0$ entonces no es derivable.
3. Si una función f, es derivable en un punto $x = x_0$, entonces es continua en $x = x_0$.

4.1.4 Derivabilidad y Continuidad en un Intervalo $(a; b)$

Definición de Derivabilidad en un Intervalo $(a; b)$:

Una función $f(x)$ es derivable en un intervalo abierto $(a; b)$ si es derivable en todo número que pertenezca al intervalo.

En Símbolos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \; existe \; \forall x_0 \in (a; b)$$

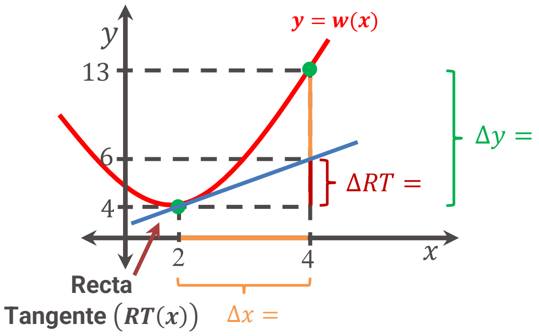
A continuación, te presentamos una conclusión que es importante tener presente para el estudio de los próximos capítulos del material:

Si una función es derivable en un intervalo abierto $(a; b)$, entonces es continua en el intervalo abierto $(a; b)$.

4.1.4 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 1: Con los datos de la siguiente gráfica se te solicita que:

- **a)** Calcules la TVM en el intervalo $[2; 4]$ e interpreta su resultado.
- **b)** Traces la recta secante para el intervalo $[2; 4]$ y halla la ecuación de dicha recta.
- **c)** Calcules la pendiente de la recta $RT(x)$ e interpretes su resultado.
- **d)** Halles la ecuación de la recta tangente $RT(x)$.



En el siguiente link se encuentra la resolución de la Actividad 1. https://youtu.be/RTdUWaK1GPk

ACTIVIDAD 2: Halla la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$, en el punto de coordenadas $(4; 16)$.

ACTIVIDAD 3: Grafica las siguientes funciones y analiza si son derivables en el punto donde cambia el comportamiento de la función. Justifica tu respuesta:

$i)$ $\quad f(x) = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad ii)$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 1 \\ -2x+3 & si\ x > 1 \end{cases}$

ACTIVIDAD 4: Para contextualizar en situaciones de la práctica profesional, las herramientas vistas e integrar progresivamente las representaciones matemáticas, trabajemos con la noticia publicada en el siguiente link:

https://bit.ly/3GvoQpg

EDICIÓN IMPRESA | LOS NEGOCIAN LOS GRANDES INVERSORES EN EL MERCADO EXTERNO | Jueves 26 de Mayo de 2016

A un mes de cotizar en bolsa, los nuevos títulos públicos avanzaron sólo un 0,9%

Se te solicita que respondas:

a) ¿Dónde y cuándo fue publicado el texto?
b) ¿Sobre qué objeto, concepto o fenómeno se trata el texto?
c) ¿Es posible calcular la variación del $0{,}9\%$ utilizando alguna de las herramientas conocidas?
d) ¿Se puede advertir alguna situación que sea importante destacar para brindar buenas recomendaciones a los bonistas?
e) ¿A qué ritmo está creciendo la cotización de los bonos entre el 23 y 25 de mayo de 2018?
f) ¿Cuándo creció más lentamente? y ¿cuándo más rápidamente?

¿Por qué la moneda del mundo es el Dólar?

En 1944, luego de la Segunda Guerra Mundial, se llevó a cabo una reunión en Bretton Woods (New Hampshire, EEUU), en la cual se establecieron nuevas reglas que rijan las **relaciones financieras internacionales**. El dólar, mantuvo su liderazgo, basado exclusivamente en el **"factor confianza"**.

4.1.5 Cálculo de la función derivada. La Regla de los 4 pasos

Antes de continuar recordemos que hallar la derivada de una función en un punto, nos permite medir la **tasa instantánea de cambio** de la variable dependiente por acción de un pequeño cambio (infinitesimal) en la variable independiente. Geométricamente esto nos da como resultado el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, si es que existe.

Ahora bien, cada función $y = f(x)$ tiene asociada una función derivada $y = f'(x)$ y, a partir de su expresión, podemos cuantificar las variaciones de $y = f(x)$ en cualquier punto de su dominio donde f sea derivable.

Cada **Regla** para encontrar la expresión de la función derivada se conoce como la regla de los **cuatro pasos** y constituye una estructura matemática que nos permite determinar la derivada de una función $y = f(x)$.

La técnica asume que, dado $y = f(x)$, se deben realizar los siguientes pasos:

1. Se da a x el incremento Δx y se calcula $y = f(x + \Delta x)$
2. Se calcula $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
3. Se divide por Δx, quedando cociente incremental:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
4. Se calcula el límite del cociente incremental:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

A esta última expresión se la llamaremos **Función Derivada de** $y = f(x)$.

Los cuatro pasos que enuncia la regla posibilitan trabajar con:
1) Variación: calculada por diferencia (valor final menos valor inicial) tanto en la variable independiente como en la dependiente (pasos 1 y 2).
2) Razón de cambio medio, al realizar el cociente entre los cambios (paso3) y su asociación con la idea de pendiente de una recta secante a la gráfica de una función en dos puntos.
3) Razón de cambio instantánea, al realizar el cálculo del límite (paso 4) y la exploración de su relación con la idea de pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función en un punto y la definición de derivada de una función en un punto.

4.1.6 Guía de Actividades Prácticas

__ACTIVIDAD 5__: Dada$f(x) = -2x^2 + 2x$ se te solicita que:

a) Halles la función derivada de $y = f(x)$, utilizando la regla de los 4 pasos.
b) Evalúes la derivada de $f(x)$ en el punto $x = \frac{1}{2}$.
c) Interpretes el resultado obtenido y expliques su significado.
d) Grafiques la función, traces la recta tangente a la curva para el punto $\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ y obtengas la ecuación de esta recta.

En el siguiente link se encuentra la resolución de la actividad: https://youtu.be/1wwx-PBVaSM

4.2 Álgebra de Derivadas: Técnicas de Diferenciación

La **Función Derivada** de $y = f(x)$ es $f'(x)$ (Se lee f prima de x) pero también puede denotarse como:

- ✓ y' (y prima).
- ✓ $\frac{dy}{dx}$ (Derivada de y con respecto a x).
- ✓ $\frac{df(x)}{dx}$ (Derivada de f con respecto a x).

La notación $\frac{dy}{dx}$, que se denomina notación de Leibniz, no debe considerarse como una fracción, aunque lo parezca. En el **Punto 5.9 "Diferencial de una Función de Variable Real" abordaremos el significado del** dy y dx.

Para obtener la función derivada de $f(x)$, utilizaremos las técnicas de diferenciación, también conocidas como **Reglas de Derivación**, que posibilitan obtener las expresiones algebraicas de las funciones derivadas en forma sencilla y rápida.

4.2.1 Reglas de derivación:

A continuación, enunciamos las diferentes reglas de derivación que se deducen al aplicar los cuatro pasos detallados en la página anterior.

Regla de la Función Constante

Si, $f(x) = k$, donde k es cualquier número real, entonces:

$$f'(x) = 0$$

La derivada de la función constante es cero.

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = 4$ es $f'(x) = 0$

Regla de la Variable

Si, $f(x) = x$, entonces:

$$f'(x) = 1$$

La derivada de la variable independiente es uno.

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = x$ es $f'(x) = 1$

Regla de la Función Potencia

Si, $f(x) = x^n$, entonces:

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

La derivada de $f(x) = x^n$ es el exponente multiplicado por la función cuyo exponente está disminuido en 1.

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$

Regla de la Constante por Función

Sea k un número real. Si $g'(x)$ existe, entonces la derivada de $f(x) = k.g(x)$, es:

$$f'(x) = k.g'(x)$$

La derivada de una función constante por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = 4x^3$ es $f'(x) = 12x^2$

Regla de la Función Raíz Cuadrada

Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La derivada de una raíz cuadrada es igual a 1 sobre 2 veces la raíz cuadrada de x.

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Regla de la Función Raíz Enésima

Si $f(x) = \sqrt[n]{x}$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

La derivada de una raíz enésima es igual a 1 sobre n veces la raíz enésima de x elevada a $n-1$.

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^{3-1}}}$$

También puedo reescribir la raíz como una potencia y utilizar la regla de la potencia.

Regla de la Función $f(x) = \frac{1}{x}$

Si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$
Al reescribir
$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$
Puedes utilizar la regla de la potencia
$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$

Puedes consultar el tema **Exponentes y Radicales** en el **Punto 1.5 del Capítulo N°0.**

La derivada de uno sobre x, es igual a 1 sobre menos x elevada al cuadrado.

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ es $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Puedo también transformar la fracción es una potencia de exponente negativo y utilizar la regla de la potencia.

Regla de la Función Exponencial

Si $f(x) = b^x$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = b^x . ln(b)$$

La derivada de la función exponencial es igual a la función exponencial multiplicada por el logaritmo natural de su base.

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = 3^x$ es:

$$f'(x) = 3^x . ln3$$

Un caso particular de función exponencial es el caso e^x

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = e^x$ es:

$$f'(x) = e^x . ln(e) = e^x$$

Regla de la Función Logarítmica

Si $f(x) = log_b x$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{x} log_b e$$

La derivada de la función logaritmo es igual a uno sobre x por el logaritmo en base b del número e.

Por ejemplo: La función derivada de $f(x) = log_2 x$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{x} log_2 e$$

Un caso particular de la función logarítmica es el logaritmo natural $f(x) = ln\, x$

Al aplicar la regla de derivación anterior a $\ln x$, nos queda que la derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{x} log_e e = \frac{1}{x} ln\, e = \frac{1}{x}$$

Puedes consultar este tema en **Combinación de Funciones en el punto 1.6 del Capítulo N°1** del texto.

Regla de la Suma de Funciones

Si, f y g son dos funciones derivables con respecto a x, entonces la combinación $(f+g)(x)$ es derivables con respecto a x y se obtiene de derivar a las funciones f y g y posteriormente sumar sus derivadas:

$$(f+g)' = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Por ejemplo:

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$, entonces la derivada de la función $m(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x$ es $m'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 2$.

Regla de la Diferencia de Funciones

Si, f y g son dos funciones derivables con respecto a x, entonces la combinación $(f-g)(x)$ es derivables con respecto a x y se obtiene de derivar a las funciones f y g y posteriormente restar sus derivadas:

$$(f-g)' = f'(x) - g'(x)$$

La derivada de una diferencia es la diferencia de las derivadas.

Por ejemplo:

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$, entonces la derivada de la función $m(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2x$ es $m'(x) = f'(x) - g'(x) = 2x - 2$.

Regla del Producto de Funciones

Si, f y g son dos funciones derivables con respecto ax, entonces la combinación $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ es derivables con respecto a x y se obtiene calculando:

$$(f \cdot g)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

La Derivada de un producto, es la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primero sin derivar por la derivada del segundo factor.

La **Regla de la Constante por Función**, es un caso particular de la **Regla del Producto para Derivadas.**

Por ejemplo:

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = ln\,(x)$, entonces la derivada de la función $m(x) = f(x)\,.\,g(x) = x^2.\,ln\,(x)$ es $m'(x) = (2x).\,ln\,(x) + x^2.\frac{1}{x}$ ∴

$$m'(x) = (2x).\,ln\,(x) + x$$

Regla del Cociente de Funciones

Si, f y g son dos funciones derivables con respecto a x, entonces la combinación $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es derivables con respecto a x y se obtiene calculando:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

La Derivada de un cociente, es la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, divido el denominador al cuadrado.

Por ejemplo:

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = ln(x)$, entonces la derivada de la función $m(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{ln(x)}$ es:

$$m'(x) = \frac{(2x).ln(x) - x^2.\frac{1}{x}}{[ln(x)]^2}$$

¿Para derivar a la función $f(x) = \frac{1}{x}$, qué otras reglas además de la enunciada se pueden aplicar?

………

………

……

4.2.2 Derivada de una función compuesta. Regla de la Cadena

Las reglas de derivación vistas hasta ahora nos permiten hallar la función derivada de funciones simples. Pero frecuentemente las funciones a derivar son funciones compuestas del tipo:

$$f(x) = \sqrt{g(x)}\,;\; g(x) = 5^{x^2}$$

Para este tipo de funciones existe una regla muy importante conocida con el nombre de **"Regla de la Cadena"**.

Por ejemplo, para hallar la función derivada de: $y = \sqrt{5^{x^2}}$

Es decir que aparece una función "intermedia" que permite escribir a la función de la siguiente manera: $y = \sqrt{g(x)}$, siendo $g(x) = 5^{x^2}$.

La función derivada respecto de x a través de la regla de la cadena consiste en:

Aplicar la regla de derivación a la operación principal y luego multiplicar la expresión por la derivada de la función "intermedia", es decir:

Puedes consultar el tema **Composición de Funciones** en el **Punto 1.6.3 del Capítulo N°1** del texto.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$$

En este caso la raíz cuadrada y luego derivar la función $g(x)$.En nuestro ejemplo:

$$y = \sqrt{5^{x^2}}$$

La función derivada es:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{5^{x^2}}} \cdot 5^{x^2} . \ln 5 \,.\, 2x$$

Derivada de una Función Compuesta (Regla de la Cadena):

La Regla de la Cadena afirma que:

Si $\boldsymbol{g}$ es una función derivable con respecto a $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{f}$ es una función derivable con respecto a $\boldsymbol{g(x)}$, entonces la función compuesta
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable con respecto a $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{d[f(g(x))]}{dx} = f'(g(x)).\, g'(x)$$

Dado que la composición de funciones **no es conmutativa** $\left(\boldsymbol{f(g(x)) \neq g(f(x))}\right)$, sus derivadas también lo serán.

En la práctica cuando debas calcular la derivada de funciones compuestas no será necesario que indiques cuál es la función intermedia, sino simplemente que identifiques cuál es la operación principal, luego apliques la regla correspondiente y por último multipliques el resultado por la derivada de la función intermedia.

Antes de continuar, reflexionemos sobre los temas que hemos estado trabajando en torno al concepto de Derivada:

- ✓ La derivada representa la tasa instantánea de cambio de la variable dependiente cuando se opera un cambio infinitesimal en la variable independiente.
- ✓ La notación $\frac{dy}{dx}$ se utiliza para representar la tasa instantánea de cambio de $\boldsymbol{y}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$. Esta notación se distingue de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que representa la tasa promedio de cambio de $y = f(x)$ en un intervalo $[x; x + \Delta x]$.
- ✓ Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ no existe, tampoco existirá la derivada.

4.2.3 Derivación Sucesiva

¿Qué es una derivada sucesiva?

Al derivar una función puede suceder que la función resultante sea también derivable, en este caso la derivada de la primera derivada se llama derivada segunda de la función. Análogamente la derivada de la derivada segunda se llama derivada tercera y así sucesivamente.

Si una función $y = f(x)$ es derivable en todos los puntos de un intervalo, la función:

$f'(x)$, se llama función derivada primera de $f(x)$.

$f''(x)$, se llama función derivada segunda de $f(x)$, o lo que es lo mismo, la derivada de $f'(x)$.

$f'''(x)$, se llama función derivada tercera de $f(x)$, o lo que es lo mismo, la derivada de $f''(x)$.

4.2.4 Resumen de las Reglas de Derivación más utilizadas.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x) = k$, $Con\ k\ Constante$	$f'(x) = 0$	-----------	-----------
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	-----------	-----------
$f(x) = kx$	$f'(x) = k.1$	$f(x) = k.g(x)$	$f'(x) = k.g'(x)$
$f(x) = x^n$	$f(x) = n.x^{n-1}$	$f(x) = [g(x)]^n$	$f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}.g'(x)$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{[g(x)]^{n-1}}}.g'(x)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{g(x)}$	$f'(x) = -\frac{1}{[g(x)]^2}g'(x)$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x\ ln(a)$	$f(x) = a^{[g(x)]}$	$f'(x) = a^{[g(x)]}.ln(a).g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^{[g(x)]}$	$f'(x) = e^{[g(x)]}.g'(x)$
$f(x) = log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}log_a e$	$f(x) = log_a g(x)$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)}.log_a e.g'(x)$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = ln\, g(x)$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)}.g'(x)$

Tabla N°16

4.2.5 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 6: Halla la función derivada primera de f, aplicando las reglas de derivación.

$i)$ $f(x) = x^5 + 4$

$ii)$ $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 6x$

$iii)$ $f(x) = 5x^2 + \frac{1}{x}$

$iv)$ $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2.\frac{1}{x}$

$v)$ $f(x) = e^{(x^7+1)}$

$vi)$ $f(z) = 10x + \sqrt{z} + x^4$

$vii)$ $f(x) = x^4.\left(\frac{1}{x} + 8\right)$

$viii)$ $f(x) = \frac{x^5 + 1}{x}$

$ix)$ $f(r) = \sqrt{x^4 + 1}$

$x)$ $f(m) = ln\,(m^2 + 1)$

$xi)$ $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{1 + x^2}$

$xii)$ $f(p) = p^{\frac{5}{3}} - 2r + \frac{1}{3}.p^6$

4.3. Aplicaciones Económicas de las Derivadas

Luego de haber estudiado los conceptos fundamentales sobre **derivada**, continuaremos en este capítulo con el análisis marginal y la utilidad que ofrece esta herramienta matemática para interpretar situaciones problemáticas que se presentan en las Ciencias Económicas, relacionadas a los costos, ingresos, beneficios de una empresa como así también el impacto que provocan sobre la demanda de bienes o servicios, variaciones porcentuales en los precios de los mismos.

4.3.1Funciones medias y marginales: Funciones de Costo, Ingreso y Beneficio.

Antes de desarrollar las funciones medias y marginales vamos a recordar los conceptos de: **Ingresos**, **Costos** y **Beneficios.**

Te proponemos analices el siguiente gráfico que representa la situación de una empresa que produce y vende camisas e identifiques:

$i)$ A partir de qué unidades producidas y vendidas por día la empresa tiene pérdidas.

$ii)$ A partir de qué unidades producidas y vendidas por día la empresa tiene ganancias.

$iii)$ A partir de qué unidades producidas y vendidas, el beneficio es nulo.

Cuando abordamos el tema **El Modelo de Costos, Ingresos y Beneficios y Aplicaciones Económicas de las Funciones Cuadráticas (Puntos 2.3.1 y 2.5 del Capítulo N° 2)**, advertimos que las funciones Ingreso, Costo y Beneficio admiten comportamientos no lineales para lograr acercar los modelos a la realidad.

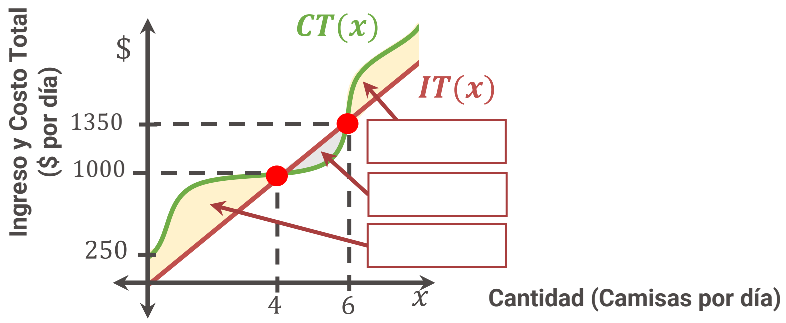


Fig. 80.: Gráficas de Funciones de: Ingreso y Costo Total

Función Costo Total

Como recordarán, los **costos** reflejan las erogaciones de dinero que debe desembolsar para hacer frente a las obligaciones contraídas. Además, hemos definido al **Costo Total** en términos de dos componentes: el **Costo Variable** y el **Costo Fijo**, por tanto:

$$CT\ (x) = CV(x) + CF$$

Asociadas a la función de Costo Total, tenemos dos funciones que serán de mucha utilidad cuando abordes el estudio de asignaturas como Economía, Sistemas de Costos, etc. Estas funciones son las de Costo Medio y Costo Marginal.

Costo Medio:

El **Costo Medio** el cociente entre el Costo Total y el número de unidades producidas. Es una medida del costo promedio en que incurre la empresa por cada unidad producida.

En Símbolos:

$$CMe(x) = \frac{CT(x)}{x} = \frac{CV(x) + CF}{x} = \frac{CV(x)}{x} + \frac{CF}{x} = CMeV + CMeF$$

Siendo $CMeV$ el **Costo Medio Variable** y $CMeF$ el **Costo Medio Fijo**.

El **Costo Medio Fijo** ($\boldsymbol{CMeF}$) se calcula como el cociente entre el Costo Fijo y el número de unidades producidas. Dado que los Costos Fijos permanecen constantes, independientes del nivel de producción de la empresa, cuando ésta produce más unidades el $CMeF$ irá disminuyendo, permitiendo que el costo fijo se redistribuya entre un mayor número de unidades.

El **Costo Medio Variable** ($\boldsymbol{CMeV}$) se calcula como el cociente entre los Costos Variables y el número de unidades producidas. El Costos Medios Variables no disminuyen necesariamente con el número de unidades producidas. Pensemos el caso de una función de costo variable que responda a un comportamiento lineal:

$$\boxed{CV(x) = (CV\ Unitario).x}$$

Al dividir al $CV(x)$ por el número de unidades producidas, observamos que el $CMeV$ permanece constantes independientemente del nivel de producción de la empresa:

$$CMeV = \frac{CV(x)}{x} = \frac{(CV\ Unitario).x}{x} = CV\ Unitario$$

Definición de Costo Marginal:

El **Costo Marginal**es la derivada de la función de Costo Total. El Costo Marginal **es una aproximación** del costo en que incurre la empresa por producir una unidad adicional de un producto o servicio.

En Símbolos:

$$CMg(x) = \frac{d[CT(x)]}{dx} = CT'(x)$$

Si la expresión algebraica de la función de Costo Total responde a un comportamiento lineal, ¿a qué será igual el Costo Marginal?

....

....

....

Las funciones lineales del costo suponen que el costo variable por unidad es constante; en ellas, el costo marginal es el mismo en cualquier nivel de producción.

Con el mismo enfoque con el que hemos abordado a la función de Costo Total, trabajaremos ahora con las funciones de Ingreso Total y Beneficio Total.

En aplicaciones económicas utilizaremos los conceptos de **costo medio** y el **costo marginal.**

En este capítulo aprendimos que a partir del **concepto de derivada** (tasa de cambio de la función en un punto) podremos abordar problemas relacionados a las Ciencias Económicas, como el Ingreso Marginal, el Costo Marginal, etc.
En el **Capítulo N° 5** con la utilización de las derivadas sucesivas nos permitirá analizar si el **ritmo de cambio crece, decrece o se mantiene.**

Función Ingreso Total

Los **Ingresos Totales**($\boldsymbol{IT(x)}$) son todos los **ingresos** que una empresa u organización recibe, procedentes de la venta de sus productos o por la prestación de sus servicios. Si dicha función responde a comportamiento lineal, el Ingreso Total se calcula como el resultado de multiplicar el precio unitario de venta por el número de unidades de productos vendidas o la cantidad de servicios prestados.

Definición de Ingreso Medio:

El **Ingreso Medio** es el cociente entre el Ingreso Total y el número de unidades vendidas o servicios prestados. Es una medida promedio del ingreso en que recibe la empresa por cada unidad vendida o servicios prestados.

En Símbolos:

$$IMe(x) = \frac{IT(x)}{x}$$

Definición de Ingreso Marginal:

El **Ingreso Marginal**es la derivada de la función de Ingreso Total. El Ingreso Marginal **es una aproximación** del ingreso que recibe la empresa por vender una unidad adicional de un producto o servicio.

En Símbolos:

$$IMg(x) = \frac{d[IT(x)]}{dx} = IT'(x)$$

Función Beneficio Total

La **ganancia** o **pérdida** que tiene una empresa por la venta de x cantidad de unidades de un producto o por la prestación de x servicios, viene dada por la función de **Beneficio Total.** Esta función surge de la diferencia entre los ingresos totales y los costos totales. Si dicha operación está definida por un valor positivo, se dice que existe una “$\boldsymbol{Ganancia}$”**;** si la misma tiene como resultado un valor negativo, se localiza una “$\boldsymbol{Pérdida}$”**.**

$$BT(x) = IT(x) - CT(x)$$

Beneficio Medio:

El **Beneficio Medio** es el cociente entre el Beneficio Total y el número de unidades vendidas o servicios prestados. Es una medida del beneficio promedio en que recibe la empresa por cada unidad vendida o servicios prestados.
En Símbolos:

$$BMe(x) = \frac{BT(x)}{x} = \frac{IT(x)}{x} - \frac{CT(x)}{x} = IMe(x) - CMe(x)$$

También podemos definir al Beneficio Medio como la diferencia entre el Ingreso Medio y el Costo Medio.

Definición de Beneficio Marginal:

El **Beneficio Marginal**es la derivada de la función de Beneficio Total. El Beneficio Marginal puede ser obtenido como la diferencia entre el Ingreso Marginal y el Costo Marginal y económicamente representa **una aproximación** del beneficio que recibe la empresa por vender una unidad adicional de un producto o servicio.
En Símbolos:

$$BMg(x) = \frac{d[BT(x)]}{dx} = BT'(x) = IT'(x) - CT'(x)$$

4.3.2 Análisis Marginal. La utilidad económica de la tasa instantánea de cambio

Como hemos visto en esta unidad, es posible **medir el cambio** que se produce en el Ingreso, el Costo o el Beneficio **por cada unidad adicional** de producción y venta, simplemente calculando el incremento absoluto (Δy) de la función que nos interesa. A pesar de ello, es importante destacar que en Ciencias Económicas existe una aplicación del concepto de derivada que *se utilizada para aproximar este incremento absoluto y que se denomina* ***Análisis Marginal***.

Análisis Marginal:

Estudia el cambio que se produce en la variable Dependiente por **CADA UNIDAD ADICIONAL** que se considera en la variable Independiente. Este cambio en Matemática lo aproxima la Derivada de la Función que estamos analizando.

En términos matemáticos el **Análisis Marginal** se interesa por estudiar el comportamiento de la variable dependiente(y) cuando **se incrementa en una unidad** la variable independiente (x).

En términos económicos, el **análisis marginal** nos brinda información sobre el **aporte** de cada producto, servicio o cliente, etc. a los **rendimientos de la Empresa**. El término **"marginal"** hace referencia a que el concepto matemático que se utiliza es una derivada, significando una tasa instantánea de cambio, mientras que la noción de **"rendimiento"** viene relacionada con el fruto o utilidad de una cosa en relación con lo que cuesta, con lo que se gasta, con lo que en ello se ha invertido, con el fruto del trabajo o con el esfuerzo de una persona, etc. Por tal motivo, el análisis marginal es aplicable a cualquier función con la que hemos trabajado a lo largo de la asignatura.

Se conoce que el costo diario de producción de q unidades de camisas de manga larga para hombre viene dado por $C(q) = 6q^2 + 10q + 25$ y que actualmente se producen 150 camisas al día. Se te solicita que determines en cuánto se incrementa el costo si se decide producir una camisa adicional pasando de 150 a 151.

Rápidamente podrás calcular el incremento real en el costo es de $\$1816$ pues:

$$\Delta y = C(151) - C(150) = 138341 - 136525 = 1816$$

A pesar de ello, el **Análisis Marginal** nos permite **APROXIMAR** el cambio en el costo total simplemente evaluando al costo marginal $\big(C'(q)\big)$ en $q = 150$.

$$C'(q) = 12q + 10 \Rightarrow C'(150) = 1810$$

Interpretemos el resultado hallado:

Si se desea incrementar la producción diaria de camisas de manga larga para hombre **en una unidad**, pasando de producir 150 a 151, el Costo Total aumentará **aproximadamente** en $1810.

Observa que ambos resultados son semejantes, lo que nos permite concluir que económicamente la función del **costo marginal** permite estimar una buena **aproximación** del incremento que se produce en el **costo** al producir una **unidad adicional**.

ACLARACIÓN

Al realizar el **análisis marginal**, la función de costo marginal debe evaluarse en el nivel actual de producción. En este caso $q = 150$.
Además, $C'(150)$ representa **geométricamente** la pendiente de la recta tangente a la curva de Costo Total para el punto $(150; C(150))$.

4.3.3Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 7: Integrando conceptos, antes de continuar te proponemos que:

a) Completes la siguiente tabla utilizando los conceptos abordados en este capítulo.

Cantidad (q)	CF	CV	CT	$CFme$	CMe	Costo Real de producir la Unidad Adicional
1	20	10				
2	20	16				
3	20	21				
4	20	26				
5	20	30				
6	20	36				
7	20	45, 5				
8	20	56				

b) Utilices un graficador para aproximar el comportamiento gráfico de las funciones de CT y CMe.

c) Interpretes el CMe para un nivel de producción de 7 unidades.

d) Si se dispusieras de la expresión analítica de la función costo, ¿sería verdadera la afirmación?:

"El Costo Marginal coincide con el costo de la unidad adicional"

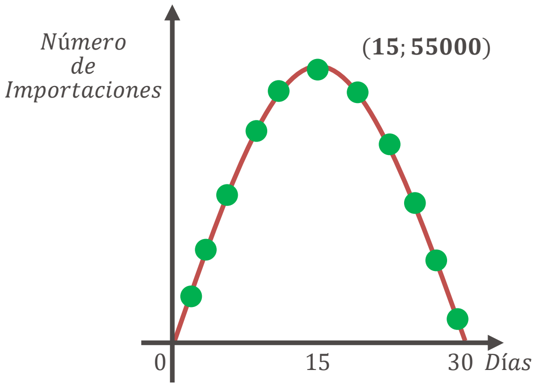
ACTIVIDAD 8: Si la función ingresos es $I(q) = 6q - \frac{q^2}{1000}$, donde q es el número de artículos producidos, se te solicita que:

a) Halles el incremento absoluto de $I(q)$ para el intervalo $[20; 21]$.

b) Aproximes ese incremento realizando el análisis marginal correspondiente.

c) Encuentres el número de artículos en donde el ingreso marginal se anula, e intérpretes el resultado.

ACTIVIDAD 9: Si las importaciones diarias de un país están representadas por la gráfica siguiente, indica:



a) En qué día la tasa instantánea de crecimiento de las importaciones fue nula.

b) En cuáles días la derivada fue positiva.

c) En cuáles días la derivada fue negativa.

d) Para esta situación, escribe el significado de lo que observaste en $b)$ y $c)$.

ACTIVIDAD 10: Con los datos brindados en la Actividad 16 del Capítulo N°2, que corresponde a un emprendimiento que se quiere llevar a cabo. Se te solicita que:

a) Calcules las funciones de Ingreso Marginal, Costo Marginal y Beneficio Marginal.

b) Realices alguna interpretación económica observando las gráficas de las funciones obtenidas.

4.4 Cambio Porcentual de la Función y Razón Porcentual de Cambio

Previo a definir los diferentes tipos de razones con las que se trabajan en Ciencias Económicas, te solicitamos que realices las siguientes actividades:

El Gerente Comercial de una empresa líder del mercado local ha negociado su contrato laboral y como consecuencia de ello, su salario ha crecido en el mes siguiente a la negociación en $\$5000$. ¿Con la información disponible, ¿podrías decir de manera concluyente si este ejecutivo ha mejorado de manera importante sus ingresos? Fundamenta tu respuesta.

……

……

……………………………………………………………………………………………………

Supone que el PBI de Argentina y Brasil para el período $2012 - 2013$, viene dado por la gráfica de la Figura 81. Estima la variación absoluta del PBI de Argentina y de Brasil entre los años considerados. Porcentualmente, ¿podrías decir que ambas economías han crecido igual?, ¿Por qué?

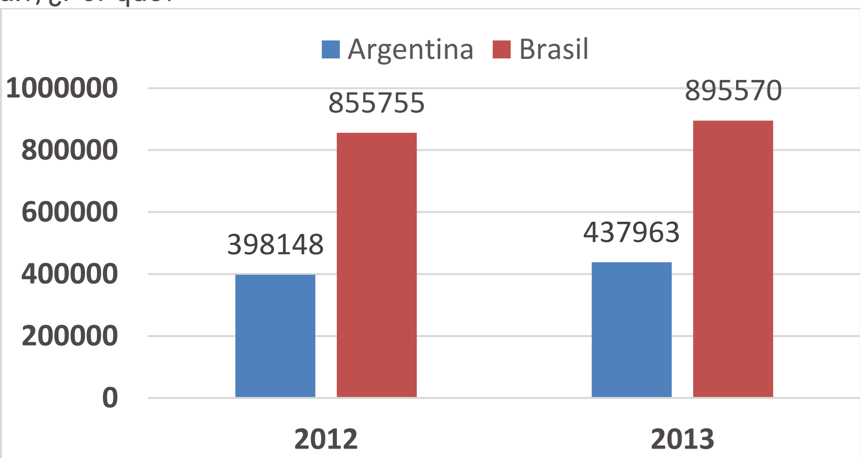


Fig. 81.: Gráfica del PBI Argentina y Brasil 2012 y 2013

……

……

……

……

……

El **Producto Bruto Interno** (PBI), también llamado como PIB, se utiliza en macroeconomía para medir al valor que totaliza la producción de los bienes y los servicios de un país en un cierto periodo detraído el consumo de bienes y servicios intermedios (los que se consumieron para poder obtener esa producción). Es habitual que se tome como el indicador básico para **reflejar la riqueza** de un país o región.

Como habrás podido observar, el incremento absoluto de una función (Δy), para un intervalo determinado, no siempre es una buena medida de cambio, ya que no contempla para su cálculo el tamaño de la magnitud o cantidad que se está estudiando. Es por ello que surge la necesidad de estudiar diferentes tipos de razones porcentuales que contemplen la magnitud en la que está medida la variable.

Se denomina **razón** al cociente que se realiza entre dos magnitudes que son comparables entre sí.

Si consideramos la función $f(x) = x^2$ y analizamos la variación producida en los intervalos $[1; 2]$ y $[2; 3]$, observamos que:

1) En el intervalo $[1; 2]$ el incremento de la variable dependiente es $\Delta y = f(2) - f(1) = 2^2 - 1^2 = 3$, lo que porcentualmente representa un incremento del 300%.
2) Mientras que en el intervalo $[2; 3]$ el incremento de la variable dependiente es $\Delta y = f(3) - f(2) = 3^2 - 2^2 = 5$, lo que porcentualmente representa un incremento del 125%.

Si bien es cierto que en ambos intervalos la variable independiente ha aumentado en una unidad, el porcentaje en que ha variado la función es distinto. Para su cálculo se utiliza el:

Cambio Porcentual de la Función:

La razón que permite calcular el cambio porcentual de una función $y = f(x)$ en el intervalo $[x_0; x_0 + \Delta x]$, viene dada por:

$$\mathrm{V}_p = \frac{\Delta y}{y}.100 = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}.100$$

Es posible calcular el **cambio porcentual en la variable independiente** calculando:

$$\frac{\Delta x}{x}.100$$

La variación porcentual representa, la variación entre un valor pasado de la función $[f(x_0)]$ y un valor presente $[f(x_0 + \Delta x)]$, en términos de un porcentaje que se determina respecto al valor pasado de la función. A modo de ejemplo, para el intervalo $[2; 3]$ el **Cambio Porcentual** de $y = f(x) = x^2$ es:

$$V_p = \frac{f(3) - f(2)}{f(2)}.100 = \frac{5}{4}.100 = 125\%$$

Es decir, se produce un cambio de 125% en el valor de la función en $x = 3$ respecto a su valor en $x = 2$, cómo es positivo, este cambio porcentual es un incremento en la función.

Otra razón muy utilizada en Ciencias Económicas es la denominada:

Razón Porcentual de Cambio:

La **razón porcentual de cambio** se obtiene realizando el cociente entre el cambio instantáneo y la función $y = f(x)$, multiplicado por 100:

$$R_p = \frac{y'}{y}.100 = \frac{f'(x)}{f(x)}.100$$

Tanto el **cambio porcentual de la función**, como la **razón porcentual de cambio**, informan sobre el porcentaje del cambio de una magnitud con respecto a otra.

Continuando con el ejemplo previamente presentado, la Razón Porcentual de Cambio de $y = f(x) = x^2$ para $x = 2$ se calcula haciendo:

$$R_p = \frac{f'(2)}{f(2)}.100 = \frac{2\,.\,2}{4}.100 = 100\%$$

Como hemos estudiado en el **Punto 4.3.2 "El Análisis Marginal"**, la pendiente de la recta tangente a la curva para un valor de $x = x_0$ permite aproximar el cambio absoluto que se produce en la función, cuando la variable independiente se incrementa en una unidad$(\Delta x = 1)$. Es por ello que también es válido afirmar que la ***razón porcentual de cambio es el porcentaje de la rapidez de cambio de la función respecto al valor de la función en*** $x = 2$**.**

4.4.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 11: La función de ventas mensuales de una empresa que comercializa zapatos está dada por:

$$v(q) = 2q^3 - 40q^2 + 220q + 160$$

Donde q representa el tiempo transcurrido. Se te solicita que:

a) Calcules la razón porcentual de cambio de las ventas a los tres meses.

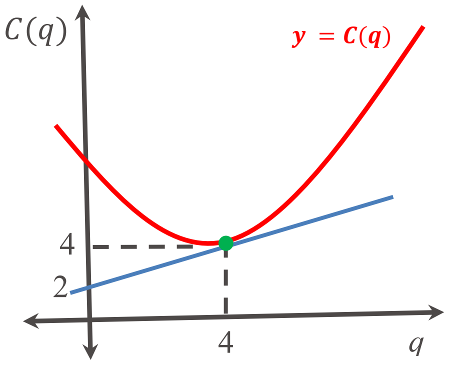
b) Interpretes el resultado obtenido en el inciso anterior.

ACTIVIDAD 12: Dada la función de costo:$C(q) = 0{,}3q^2 + 3{,}5q + 9$.Se te solicita que:

a) Determines qué tan rápido cambia C con respecto a q cuando $q = 10$ e intérpretes el resultado.

b) Calcules la razón de cambio porcentual de C respecto a q cuando $q = 10$ e intérpretes el resultado.

ACTIVIDAD 13: Determina la razón porcentual de cambio de $C(q)$para $q = 4$.



ACTIVIDAD 14: El Producto Bruto Nacional(PNB) de un cierto país está dado por $PBN(t) = 2.t^2 + 10t + 200$ billones de dólares, donde t representa los años a partir del año 1980 (el año cero,$t = 0$ corresponde a 1980). Con la información disponible, se te solicita que:

a) Determines el cambio porcentual del PNB para el período $1980 - 1981$ e intérpretes el resultado.

b) Determines el ritmo al que estaba cambiando el PNB en el año 1980 e intérpretes el resultado.

c) Determines la razón porcentual de cambio del PNB en el año 1980 e intérpretes el resultado.

El **Producto Nacional Bruto** (PNB) se ocupa de medir la producción realizada por los ciudadanos de un país independientemente de donde se encuentren.
Mientras el PBI mide la producción de bienes y servicios finales dentro de las fronteras de un país, independientemente del origen del capital que realiza la producción.

4.5 Elasticidad de Funciones Económicas

La elasticidad es un concepto que proviene de la física. Corresponde a una propiedad mecánica que tienen todos los materiales. Alfred Marshall[8] introdujo este concepto a la economía para cuantificar la variación experimentada por una variable al cambiar la otra.

Para comprender el significado económico de la elasticidad se debe partir de al menos dos variables, entre las que exista cierta dependencia, por ejemplo, los tipos de interés y el producto bruto interno (PBI), el número de teléfonos celulares vendidos y su precio, entre otros.

Se puede calcular la elasticidad de cualquier función $y = f(x)$ y la misma se utiliza para medir:

- ✓ El grado de respuesta de la variable dependiente "y", frente a la variación de la variable independiente en el intervalo $[x; x + \Delta x]$. Denominada **Elasticidad Arco**.

$$\eta \approx \frac{\frac{\Delta y}{y}.100}{\frac{\Delta x}{x}.100} = \boxed{\frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\begin{array}{c} Cambio\ porcentual \\ de\ la\ función \end{array}}{\begin{array}{c} Cambio\ porcentual \\ de\ la\ variable\ independiente \end{array}}$$

- ✓ La sensibilidad o intensidad de repuesta de una función ante cambios en el valor de la Variable Independiente. Llamada **Elasticidad Punto.**

$$\boxed{\eta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)}$$

En economía se considera principalmente la **elasticidad** para las **funciones de Demanda y Oferta**. En donde se busca medir el impacto o el grado de las variaciones de las demandas o las ofertas de los productos dadas diversas variaciones de precios. Pero no son los únicos tipos de elasticidades que se utilizan, algunas de ellas son:

Un material es elástico si al aplicarle una fuerza se deforma y al dejar de aplicarla vuelve a su forma original. Como un resorte, una banda elástica, la piel, los músculos. Mientras que los materiales que al ser deformados y dejar de aplicar la fuerza no vuelven a su forma original se llaman inelásticos o plásticos, como el cemento, el papel.

[8]Alfred Marshall (26 de julio de 1842-13 de julio de 1924), economista británico. Se destaca una inmensa habilidad matemática que permitió un profundo estudio de la economía. Entre sus obras destacan Principios de Economía (1890) e Industria y comercio (1919).

Diferentes Tipos de Elasticidades	Notación	Interpretación Económica
Elasticidad de la demanda o elasticidad precio de la demanda	E_pD	Porcentaje en que varía la cantidad demandada de un producto ante variaciones porcentuales en su precio.
Elasticidad renta de la demanda	E_rD	Porcentaje en que varía la cantidad demandada de un producto ante variaciones porcentuales en la renta de sus consumidores.
Elasticidad precio cruzada de la demanda	$E_{pc}D$	Porcentaje en que varía la cantidad demandada de un producto ante variaciones porcentuales en el precio de otros productos relacionados con este.
Elasticidad precio de la oferta	E_pO	Porcentaje en que varía la cantidad de ofertada de un producto ante variaciones porcentuales en el precio del producto.

Particularmente desarrollaremos la **elasticidad de la demanda** o **elasticidad precio de la demanda**, debido a que permite determinar la respuesta de los consumidores ante variaciones del precio de un bien o servicio.

La **Elasticidad de la Demanda** E_pD, mide en que porcentaje varía la cantidad demandada de un producto cuando se produce una **variación de un** 1% **en el precio** de dicho producto.

La **cantidad demandada** y el **precio** siempre varían de manera **inversa** (si el precio sube la cantidad demandada baja). Cuando se realiza el cálculo de la elasticidad E_pD siempre el resultado tendrá signo negativo. Para interpretar el resultado hallado, se considerará la elasticidad de la demanda en **valor absoluto**($|\eta|$).

Si la función de demanda de un bien viene dada por la expresión $\boldsymbol{D(p) = q = 36 - 0,25.p}$

$i)$ Escribe la fórmula que te permita calcular la elasticidad de una función de demanda en un punto.

$ii)$ Clasifica e interpreta el tipo de elasticidad que presenta la función de demanda para un $p = 120$.

CLASIFICACIÓN DE ELASTICIDAD

✓ **UNITARIA**

Si el cambio porcentual en que varía la función es igual al cambio porcentual en que varía la variable independiente

$|\eta| = 1$

✓ **ELÁSTICA**

Si el cambio porcentual en que varía la función es mayor al cambio porcentual en que varía la variable independiente.

$|\eta| > 1$

✓ **INELÁSTICA**

Si el cambio porcentual en que varía la función es menor al cambio en que varía la variable independiente.

$|\eta| < 1$

Resolución:

i) Para calcular la elasticidad de la función de demanda $D(p) = q = \mathbf{36 - 0,25.}\boldsymbol{p}$ en un punto, demos hacer:

$$\eta = \frac{p}{D(p)} \cdot D'(p) = \frac{p}{36 - 0{,}25.p} \cdot (-0{,}25)$$

ii)Evaluando la elasticidad punto en $p = 120$:

$$\eta = \frac{120}{36 - 0{,}25\,.\,120} \cdot (-0{,}25) = \frac{120}{6} \cdot (-0{,}25) = -5 \Rightarrow |\eta| = 5$$

Interpretación:

Si el precio se incrementa en un 1%, la cantidad demandada disminuirá aproximadamente en un 5% (mayor proporción).

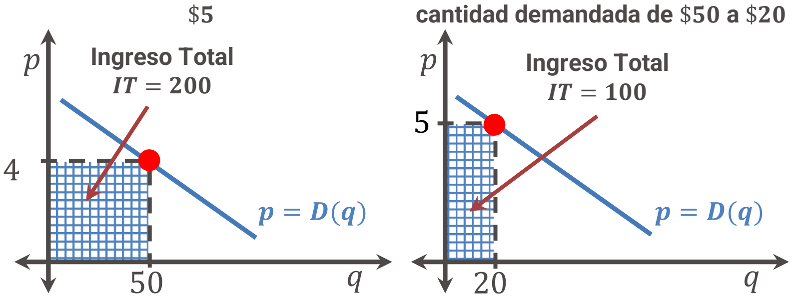
La fórmula de elasticidad recoge las variaciones porcentuales que experimentan las variables, pero no tiene en cuenta la unidad de medida en la que éstas están expresadas (precios, cantidades, etc).

4.5.1 Guía de Actividades Prácticas

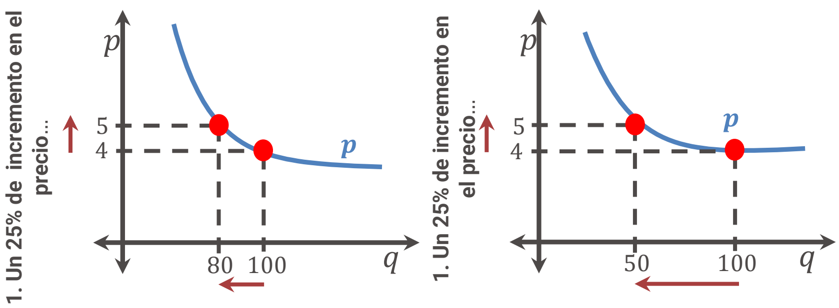
ACTIVIDAD 15: Con los datos de las gráficas siguientes te proponemos que:

- **a)** Calcules el $\%$ de variación de la cantidad demandada y el $\%$ de variación del precio.
- **b)** Clasifiques la elasticidad de la función demanda en elástica, inelástica o unitaria

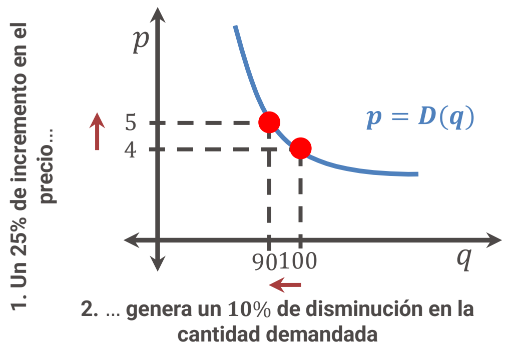
Una Subida del Precio de $\$4$ a $\$5$ **... Provoca una disminución de la cantidad demandada de $\$50$ a $\$20$**



ACTIVIDAD 16: Con los datos de las gráficas siguientes te proponemos que clasifiques la elasticidad de la función demanda en elástica, inelástica o unitaria



2. ... genera un 20% de disminución en la cantidad demandada **2. ... genera un 50% de disminución en la cantidad demandada**



ACTIVIDAD 17: Determina cómo responden los consumidores, si el precio de una noche de hotel sube de $\$2000$ a $\$2200$, reduciendo la cantidad demandada de 100 a 80 habitaciones reservadas.

ACTIVIDAD 18: Si la función de demanda de un consumidor es: $D(p) = 2000 - 2p$, se te solicita que calcules:

a) La elasticidad punto del precio de la demanda para un precio $p = \$200$, clasifícala y explica el significado del resultado.

b) La elasticidad punto del precio de la demanda para un precio $p = \$800$, clasifícala y explica el significado del resultado.

c) La elasticidad punto del precio de la demanda para un precio $p = \$500$, clasifícala y explica el significado del resultado.

4.6 Esquema de Derivada de Funciones de una Variable Independiente

Como cierre de la unidad, te presentamos un esquema conceptual que resume los contenidos de la misma.

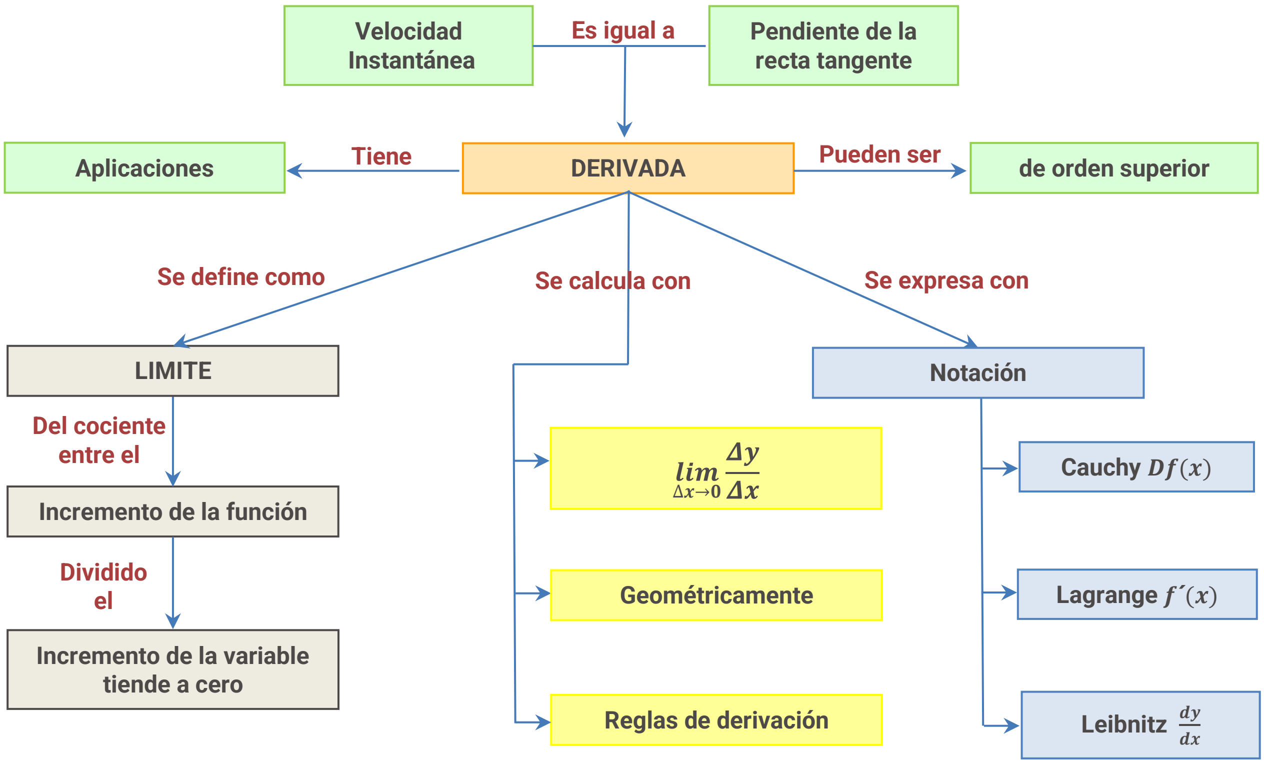


Fig.82: Mapa Conceptual Derivada

Además, como cierre de la sección **"4.3. Aplicaciones Económicas de las Derivadas"**, te proponemos que realices un mapa conceptual que integre los principales conceptos.

Puedes realizar el mapa conceptual mediante la aplicación *Cmap Tools* .

CAPÍTULO Nº5:

ANÁLISIS DIFERENCIAL. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Objetivos:

Al finalizar este quinto capítulo deberás ser capaz de:

- ✓ Fundamentar el comportamiento de una función y su gráfica mediante el uso de derivadas.
- ✓ Resolver distintos problemas de optimización de funciones.
- ✓ Definir diferencial de una función en un punto.
- ✓ Explicar la interpretación geométrica de la diferencial de una función en un punto.

Contenidos:

5. Análisis Diferencial. Diferencial de una Función

El cálculo de variaciones puede considerarse una generalización del cálculo matemático, y, por tanto, se incluye firmemente en el campo del análisis. Euler y Lagrange perfeccionaron el sistema del cálculo de variaciones. Se ocuparon de encontrar el camino, curva, superficie, etc., para la cual una función determinada posee un valor estacionario; normalmente, un valor máximo o mínimo.

El cálculo es de utilidad para bosquejar la gráfica de una función. En esta unidad, a través de lo que llamamos estudio diferencial de una función, se esbozará la gráfica de cualquier tipo de función. La primera derivada se emplea para determinar cuándo una función es creciente o decreciente, y para localizar los máximos y mínimos relativos. La segunda derivada, para determinar la concavidad o convexidad y los puntos de inflexión de una función. Además, se estudiará el concepto de diferencial de una función, el cual aproxima los cambios absolutos de una función.

Los problemas de optimización de funciones son una de las aplicaciones más inmediatas e interesantes del cálculo de derivadas.

La optimización es un área de la Matemática Aplicada que permite modelar y resolver problemas de la vida real; sus principios y métodos se usan para resolver problemas cuantitativos en las ciencias económicas. El objetivo principal de la optimización es la mejor utilización de los recursos disponibles para cumplir una determinada tarea, maximizar un beneficio o minimizar un costo.

Cada día afrontamos variados problemas de optimización; por ejemplo, buscamos el mejor camino para ir de un lugar a otro, tratamos de hacer la mejor elección al hacer una compra, buscamos la mejor ubicación cuando vamos a un cine o a un teatro, escogemos al mejor candidato, a nuestra percepción, en una elección. Evidentemente, en ninguno de estos casos usamos matemática formalizada y rigurosa para encontrar lo que nos proponemos, pues afrontamos los problemas con los criterios que nos da la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente encontremos la solución óptima. Los invitamos a hacer uso de las derivadas para encontrar respuesta a problemas de este tipo.

A diferencia de lo desarrollado en capítulos anteriores, en primer lugar, desarrollaremos un caso práctico de aplicación que contiene preguntas disparadoras para que posteriormente estemos en condiciones de abordar el contenido teórico del presente capítulo.

UN POCO DE HISTORIA

Leonhard Euler

"Dado que la textura del universo es la más perfecta y la obra de un Creador sapientísimo, nada sucede en el universo sin obedecer alguna regla de máximo o mínimo".

Planta Embotelladora de Agua

La señora Ángeles Esteves posee una planta embotelladora de agua, la misma puede procesar hasta 18 mil litros de agua por día en diferentes tipos de envases.

La función que representa el beneficio de la planta, expresado en miles de pesos, viene dado por: $B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x$. Donde x representa la cantidad de litros (medido en miles de litros) que la empresa produce y vende por día. A efecto de este análisis, consideraremos el dominio de la situación bajo a estudio al intervalo cerrado $[0; 18]$, es decir $DomB = [0; 18]$.

Tratamiento del agua en la planta embotelladora

Para la purificación del agua, la planta embotelladora, utiliza el tratamiento llamado de ósmosis inversa. Es un proceso de separación por membrana que es capaz de rechazar contaminantes tan pequeños como $0{,}0001$ mm: el nivel más fino de filtración posible, permitiendo obtener, de forma sencilla, agua desalinizada y exenta de contaminación bacteriológica.

Fig. 83: Planta embotelladora de agua

Ángeles acuerda con ustedes para que la asesoren y elaboren un informe indicando la situación actual de la planta, teniendo en cuenta que desea conocer sobre los siguientes aspectos:

1. ¿En qué intervalos la función beneficio crece? ¿Y en que intervalo decrece?
2. ¿Con qué nivel de procesamiento se alcanza el máximo beneficio y a que monto asciende?
3. ¿Cuándo el beneficio es mínimo y a que monto asciende?
4. ¿A qué ritmo está creciendo el beneficio?
5. ¿A qué ritmo decrece el beneficio?
6. ¿Cuándo el beneficio marginal es nulo?
7. ¿Cuándo decrece y cuando crece el beneficio marginal?
8. ¿Cuál será el incremento aproximado en el beneficio de su empresa si pasa de embotellar y vender 3500 a 4000 envases?

En esta unidad, se abordan las herramientas que serán de utilidad para esbozar la gráfica de la función planteada por medio del **estudio diferencial de la función**.

5.1 Crecimiento o decrecimiento de una función. Signo de la derivada primera para la determinación de intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función

En la unidad anterior aprendimos a calcular la derivada primera de una función $f´(x)$, ahora aprenderemos a reconocer la información que nos brinda la derivada respecto del comportamiento de la función original $f(x)$.

La primera derivada proporciona información útil para el trazado de curvas. Su signo se utiliza para determinar cuándo una función es creciente o decreciente en un intervalo.

Signo de la derivada primera de $f(x)$

Sea f **diferenciable** en el intervalo $(a; b)$, entonces:

✓ Si la derivada primera de f es **positiva** para toda x en el intervalo $(a; b)$, entonces f es **creciente** en dicho intervalo.

En símbolos:

Si $\boldsymbol{f´(x) > 0}$ $\forall\, x\ \in (a; b)$, la **función crece** en el intervalo $(a; b)$

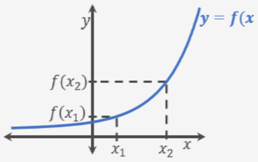
✓ Si la derivada primera de f es **negativa** para toda x en el intervalo $(a; b)$, entonces f es **decreciente** en dicho intervalo.

En símbolos:

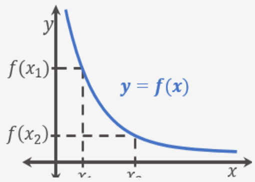
Si $\boldsymbol{f´(x) < 0}$ $\forall\, x\ \in (a; b)$ la **función decrece** en el intervalo $(a; b)$.

Cuando abordamos el tema **Interpretación de Gráficas** (Punto 1.4.3 del **Capítulo N° 1**)

f es **creciente** en el intervalo $(a; b)$, sí x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.



f es **decreciente** en el intervalo $(a; b)$, sí para cualquier valor dentro del intervalo $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.



Observa los gráficos de las funciones estudiadas en el Capítulo N°2. Traza rectas tangentes y a través del signo de las pendientes de las rectas trazadas responde si las funciones crecen, decrecen o se mantienen constantes.

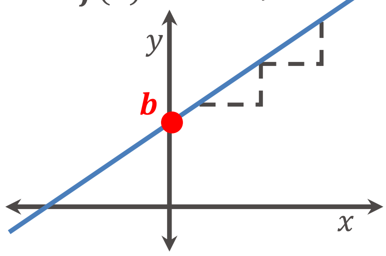
Función	Intervalo	Signo de $f´(x)$	Crecimiento o Decrecimiento de $f(x)$
$\boldsymbol{f(x) = m.x + b}$ 			

Tabla N°17

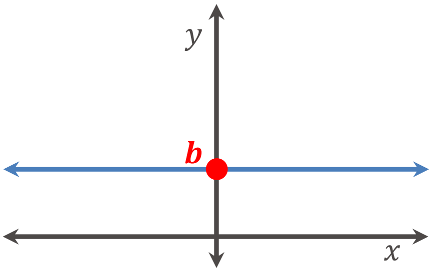
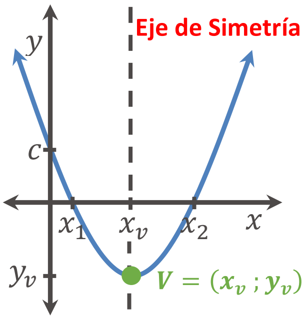
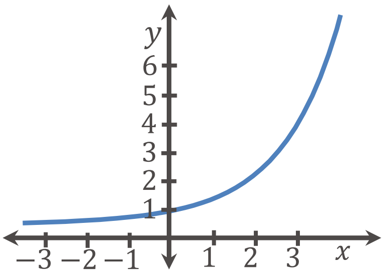
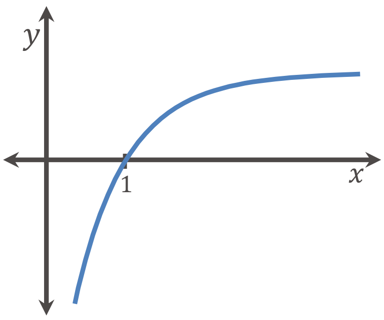
Función	Intervalo	Signo de $f'(x)$	Crecimiento o Decrecimiento de $f(x)$
$y = b$ 			
$f(x) = a.x^2 + b.x + c$ 			
$f(x) = b^x$ 			
$f(x) = log_b(x)$ 			

Tabla N°18

Se comienza a trabajar con el caso práctico de aplicación: **“Planta Embotelladora de Agua”**. Para ello se grafica la función $B(x)$ con **GeoGebra.**

Dada la gráfica de la función de la actividad propuesta, reconoce los valores del dominio donde la función tiene un comportamiento creciente o decreciente.

………

………

……

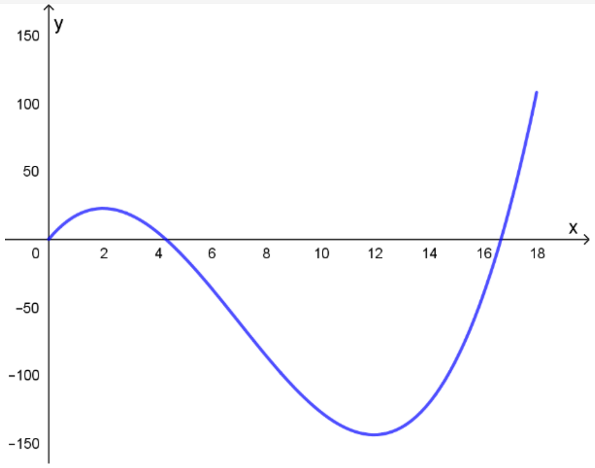


Fig. 84: Función Beneficio de la Planta Embotelladora

1. ¿En qué intervalos la función beneficio crece? ¿Y en que intervalo decrece?

Gráficamente observamos que la función **crece** en el intervalo $(0;2) \cup (12;18)$, mientras que **decrece** en el intervalo $(2;12)$.

Luego trazamos rectas tangentes a la curva, en la gráfica de la función $B(x)$, y se observamos el signo sus pendientes.

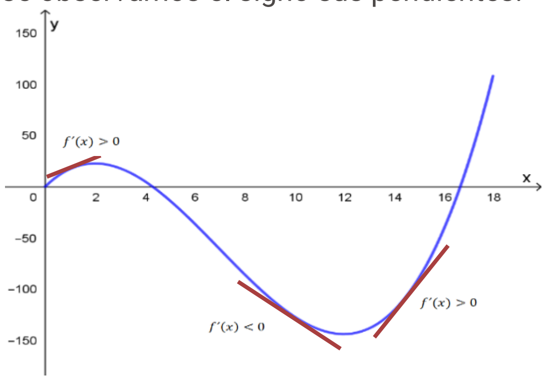


Fig. 85: Trazado de rectas tangentes a $B(x)$

GeoGebra es un **software** matemático **interactivo libre** para la educación en colegios y universidades.

En los intervalos $(0; 2) \cup (12; 18)$, las rectas tangentes a la curva tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva, $f'(x) > 0$, para todo x en esos intervalos. En el intervalo $(2; 12)$, las rectas tangentes tienen pendientes negativas por lo que $f'(x)$ es negativa, $f'(x) < 0$.

Como se puede observar, se determinaron los intervalos del dominio en los que la función crece y decrece, ahora verificamos analíticamente el signo de la derivada primera en dichos intervalos.

La función beneficio, $B(x)$, de la empresa es:

$$B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x$$

La derivada primera de $B(x)$ es $B'(x) = x^2 - 14x + 24$

Para hallar los intervalos donde la derivada primera es positiva se debe plantear la siguiente desigualdad:

$$B'(x) = x^2 - 14x + 24 > 0$$

Reescribiendo a esta función cuadrática en su forma factorizada, nos queda:

$$B'(x) > 0 \Leftrightarrow (x - 12).(x - 2) > 0$$

Para resolver esta desigualdad en donde el primer miembro es un producto, se deben considerar dos situaciones:

a) Que ambos factores del producto sean positivos para que la desigualdad se cumpla:

$$x - 12 > 0 \quad \wedge \quad x - 2 > 0$$

resulta $x > 12 \wedge x > 2$

Recuerda que el símbolo "$\wedge$", indica que, la solución de la inecuación $(B'(x) > 0)$, viene dada por la intersección de ambos intervalos de solución. Además, dado el contexto del problema, podemos concluir que $B'(x) > 0 \forall x \in (12; 18]$.

b) Que ambos factores del producto sean negativos para que la desigualdad se cumpla:

$$x - 12 < 0 \quad \wedge \quad x - 2 < 0$$

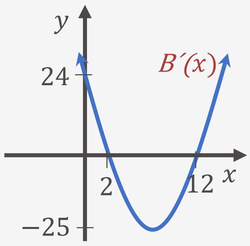
resulta $x < 12 \wedge x < 2$

Dado el contexto del problema, podemos concluir que $B'(x) > 0 \forall x \in [0; 2)$.

A través del criterio de la derivada primera de $y = f(x)$, es posible concluir que en los intervalos $(0; 2)$ y (12;18) la función derivada primera, $y = B'(x)$, es positiva por lo que la función $y = B(x)$ crece en dichos intervalos.

Luego, para hallar los intervalos donde la derivada primera es negativa se debe plantear la siguiente desigualdad:

Para hallar los intervalos de positividad y negatividad de la derivada primera Se puede analizar el **signo de $y = B'(x)$**, **gráficamente**,



analíticamente, por medio del cálculo de la derivada primera y posteriormente se volcaron los datos obtenidos en una **tabla**.

$$B'(x) = x^2 - 14x + 24 < 0$$

Factorizamos y nos queda:

$$B'(x) < 0 \Leftrightarrow (x-12).(x-2) < 0$$

Para resolver esta desigualdad en donde el primer miembro es un producto, se deben considerar dos situaciones:

a) Que el primer factor del producto sea positivo y el otro negativo:

$$x - 12 > 0 \quad \wedge \quad x - 2 < 0$$

$$\text{resulta} \;\; x > 12 \;\wedge\; x < 2$$

∴ No existe solución para la situación planteada dado que no existe intersección entre los conjuntos.

b) Que el primer factor del producto sea negativo y el otro positivo:

$$x - 12 < 0 \quad \wedge \quad x - 2 > 0$$

$$\text{resulta} \;\; x < 12 \;\wedge\; x > 2$$

Dado el contexto del problema, podemos concluir que $B´(x) < 0 \forall x \in (2; 12)$.

A través del criterio de la derivada primera de $y = f(x)$, es posible concluir que, en el intervalo $(2; 12)$ la función derivada primera, $y = B´(x)$, es negativa, por lo que la función $y = B(x)$ decrece en dicho intervalo.

Para comprobar que el signo de la derivada primera se mantiene dentro de los intervalos bajo análisis, podemos, por ejemplo, evaluar la derivada primera en un valor de x que pertenece al intervalo donde la función es decreciente, intervalo $(0,12)$:

$$B'(3) = -9 < 0$$

El signo de la derivada primera de dicha función evaluada en $x = 3$ es menor que cero.

Con los datos obtenidos anteriormente, se te solicita que completes la siguiente tabla con los intervalos, los signos de $y = B'(x)$, e indiques el crecimiento o decrecimiento de $y = B(x)$ para poder observar los datos con mayor claridad.

Intervalos	Signo de $B´(x)$	Crecimiento/Decrecimiento de $B(x)$
	$+$	
$(2, 12)$		Decrece
$(12, 18)$		

Tabla N°19

5.1.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 1: Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones. Para ello puedes trazar rectas tangentes a las gráficas de f o plantear las inecuaciones pertinentes:

i) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

ii) $f(x) = ln\, x$

iii) $f(x) = 5^x$

iv) $f(x) = \frac{1}{x}$

ACTIVIDAD 2: Para contextualizar en situaciones de la práctica profesional, se utilizan las herramientas vistas para integrar progresivamente las representaciones matemáticas. Se trabaja nuevamente con la noticia publicada en el siguiente link:

https://goo.gl/mzXQgt

EDICIÓN IMPRESA | LOS NEGOCIAN LOS GRANDES INVERSORES EN EL MERCADO EXTERNO | Jueves 26 de Mayo de 2016

A un mes de cotizar en bolsa, los nuevos títulos públicos avanzaron sólo un 0,9%

A partir del gráfico se te solicita que:

a) Traces rectas tangentes a la gráfica.

b) A través del signo de la derivada primera aproximes cuándo crece y decrece la cotización de los títulos públicos.

5.2 Puntos Críticos de primer orden

El **signo de la derivada primera de $f(x)$**, $f'(x)$, nos informa acerca del crecimiento o decrecimiento de la función. Ahora bien, debemos conocer a partir de qué valor de x, del dominio de f, la función cambia su comportamiento. Si nos detenemos en observar la Fig. 86:

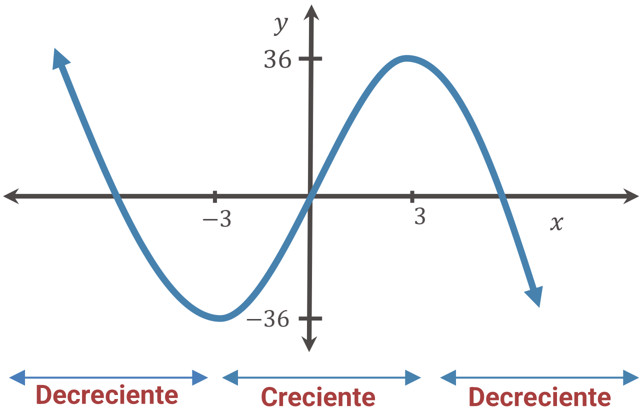


Fig. 86: Función $f(x) = 18\,x - \frac{2}{3}x^3$

El dominio de la función f, por tratarse de una función polinómica, son todos los reales ($Domf = \mathbb{R}$), y los intervalos del dominio donde f crece y decrece son:

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento/Decrecimiento de $f(x)$
$(-\infty, -3)$	$-$	Decrece
$(-3, 3)$	$+$	Crece
$(3, \infty)$	$-$	Decrece

Tabla N°20

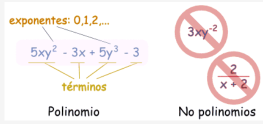
Traza la recta tangente en $x = -3$ y en $x = 3$ ¿geométricamente cómo son esas rectas tangentes y valor asumen sus pendientes?

....

....

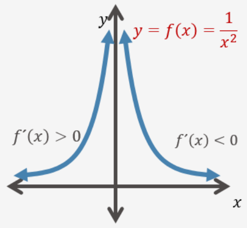
....

Si se observan los gráficos de la Fig.87:



Cuando abordamos el tema **Algunas funciones $\mathbb{R}$ de variable $\mathbb{R}$** (Punto 1.5 del Capítulo Unidad N°1) se definió que las **funciones polinómicas** son aquellas cuya expresión es un polinomio y su **dominio** son todos los **reales**.

No existen valores críticos en los puntos donde $f(x)$ **no es continua.**



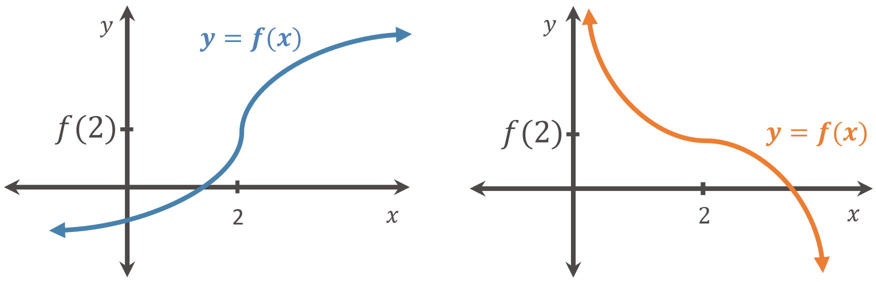


Fig. 87: Cambios de concavidad

En ambos gráficos, traza las rectas tangentes en $x = 2$ y responde, ¿geométricamente cómo son esas rectas tangentes?, ¿es posible conocer el valor que asume la pendiente de cada recta?

En las gráficas analizadas en la Fig. 87, al trazar la recta tangente a la curva en el punto $(2, f(2))$, se observa que, para la primera gráfica la recta tangente es vertical, no estando definido el valor de su pendiente, por lo que, $f´(2) = No\ Existe$. En el segundo gráfico la recta tangente a la curva en el punto $(2, f(2))$ es horizontal por lo que $f´(2) = 0$.

Estos valores que pertenecen al dominio de $y = f(x)$ y para los que la derivada primera se anula o no existe, se los denomina **valores críticos de primer orden** de la función $y = f(x)$.

Definición de valor crítico y de punto crítico de primer orden

Si $x = x_0$ pertenece al dominio de f y $f´(x_0) = 0$ ó $f´(x_0)$ no existe, entonces $x = x_0$ se denomina **valor crítico de primer orden** de f.

Si $x = x_0$ es un **valor crítico de primer orden**, entonces el punto $(x_0; f(x_0))$ se denomina **punto crítico de primer orden** de f.

Los puntos críticos de primer orden de la “Planta Embotelladora de Agua” serán obtenidos en el próximo apartado.

5.2.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 3: Encuentra analíticamente los puntos críticos de primer orden de las siguientes funciones:

$i)$	$f(x) = -2x^2 + 4x + 3$	$iv)$	$f(x) = 5^x$
$ii)$	$f(x) = ln\, x$	$v)$	$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$
$iii)$	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$	$vi)$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$

ACTIVIDAD 4: Retoma las actividades 15 y 16 del Capítulo N°2 y encuentra los puntos críticos de primer orden de la función beneficio.

5.3 Extremos Relativos

La denominación **extremos relativos**, se debe a que se compara el valor de la función en un punto, con el valor que asume la función en puntos cercanos. Así los extremos relativos son **locales por naturaleza** y pueden a su vez ser **máximos relativos** o **mínimos relativos**.

Si se desea encontrar todos los extremos relativos de una función, la búsqueda puede limitarse a aquellos valores de la variable independiente (x) en el dominio de f para los cuales $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe. Lo anterior reduce la búsqueda de extremos relativos de infinitos valores candidatos para los cuales f está definida, a un pequeño número finito de posibles candidatos.

Como primer paso para la búsqueda de extremos deben hallarse los **puntos críticos de primer orden**, definidos en el apartado anterior, lo que aseguran **la existencia de una condición necesaria para encontrar extremos relativos**.

Condición Necesaria para la existencia de extremos relativos

Si f alcanza un **extremo relativo** cuando $x = x_0$, entonces $f'(x_0) = 0$ o bien $f'(x_0)$ no existe.

La implicancia en $x = x_0$ de la regla sólo es en una dirección:

$$\left.\begin{matrix} Extremo \\ Relativo \\ en\ x = x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f'(x_0) = 0 \\ \text{ó} \\ f'(x_0)\ no\ existe \end{matrix}\right.$$

Es decir, **todo extremo relativo ocurre en un punto crítico, pero no todo punto crítico es un extremo relativo**.

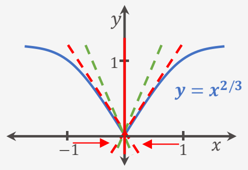
Si la función presenta un **extremo relativo** en $x = x_0$ y **la derivada de la función en ese punto no existe** ($f'(x_0)$ no existe), entonces en $x = x_0$ la función presenta un **punto cúspide** o un **punto anguloso**. Pero como hemos visto en la primera gráfica de la Fig. 87, por el solo hecho de que en $x = x_0$ la derivada primera no exista, no asegura que la función en ese valor presente un **extremo relativo**.

Por otro lado, si la función presenta un **extremo relativo** en $x = x_0$ y **la derivada de la función en ese punto existe**, entonces necesariamente la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal y su pendiente es cero $(f'(x_0) = 0)$.

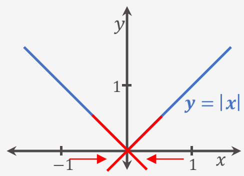
Asegúrate de observar la diferencia entre los valores extremos relativos y el lugar donde ocurren.

Cuando abordamos el tema **Derivabilidad y Continuidad en un punto $x = x_0$** (Punto 4.1.3 del Capítulo N°4). Se analizaron dos casos que pueden presentarse en los que la función es continua en el punto $x = x_0$ pero no es derivable en dicho punto.

Punto Cúspide:



Punto Anguloso:



Es importante advertir que una función puede poseer en $x = x_0$ **un valor crítico de primer orden** y, sin embargo, carecer de extremos relativo en $x = x_0$. En la Fig. 88 se presenta dos gráficas que muestran esta situación:

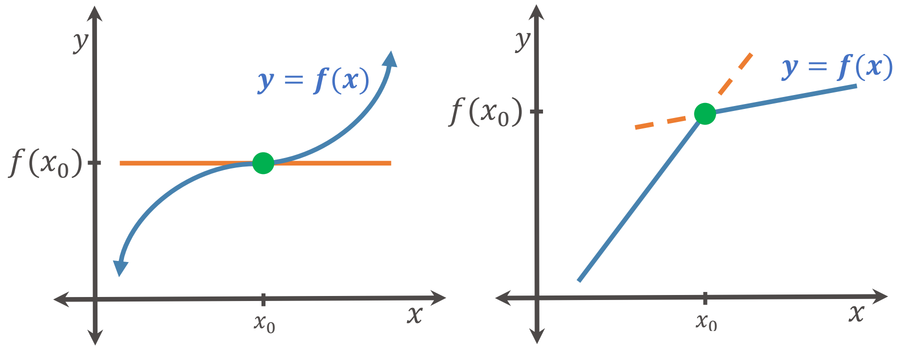


Fig. 88: Presencia de valor crítico, pero no de extremo relativo

En la primera gráfica de la Fig. 88, la función no presenta un **extremo relativo** para $x = x_0$, además, la derivada primera se anula pues la recta tangente a la curva en el punto $(x_0; f(x_0))$ es horizontal, estando la pendiente de esta recta, determinada por $f'(x_0) = 0$ (un **valor crítico de primer orden de f**). En la segunda gráfica la función tampoco presenta en $x = x_0$ **extremo relativo**, a pesar de presentar **un valor crítico de primer orden**, pues $f'(x_0)$ no existe (**Punto Anguloso**).

Como puede observarse, **la presencia únicamente de valores críticos de primer orden de $y = f(x)$ no asegura que la función presente en $x = x_0$ un extremo relativo**. Es necesario que se cumplan adicionalmente otras condiciones para afirmar que una función presenta en un valor crítico de primer orden un extremo relativo (máximo o mínimo relativo).

Es por ello, que a continuación se presenta el criterio que nos permite asegurar la existencia de valores extremos relativos:

Criterio de la primera derivada para la determinación de extremos relativos

Si $y = f(x)$ es **continua** en un intervalo abierto $(a; b)$, que contiene al **valor crítico de primer orden** $x = x_0$ y f es **derivable** en $(a; b)$, excepto posiblemente en $x = x_0$ y:

- ✓ Si $f'(x) > 0 \; \forall x \in (a; x_0)$ y $f'(x) < 0 \; \forall x \in (x_0; b)$ entonces f presenta un **máximo relativo** en $x = x_0$.
- ✓ Si $f'(x) < 0 \; \forall x \in (a; x_0)$ y $f'(x) > 0 \; \forall x \in (x_0; b)$ entonces f presenta un **mínimo relativo** en $x = x_0$.

A continuación, se presentan las gráficas de dos funciones que presentan extremos relativos en $x = x_0$:

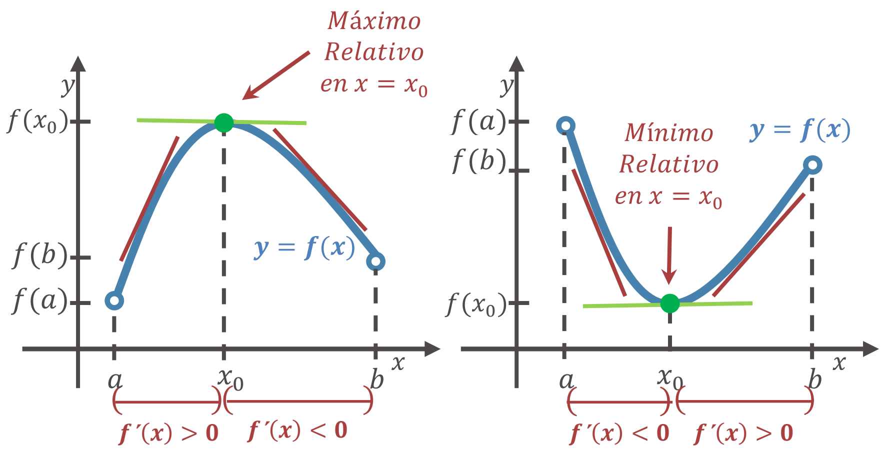


Fig. 89.: Graficas de funciones que presentan extremos relativos en $x = x_0$

Sea $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$. Como $f'(0) = 0$ y $f(0)$ está definida, 0 es un valor crítico. Ahora, si $x < 0$, entonces $3x^2 > 0$. Si $x > 0$, entonces $3x^2 > 0$. Como $f'(x)$ no cambia de signo, no existe ni un máximo relativo ni un mínimo relativo.

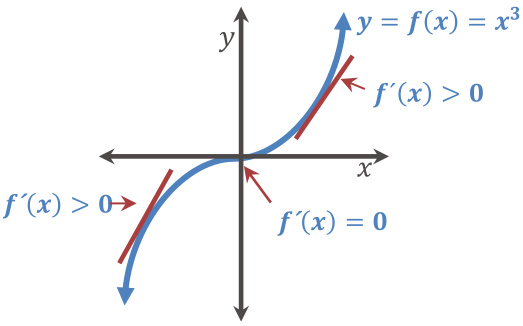


Fig. 90.: Función $f(x) = x^3$

Dada $f(x) = \frac{1}{x^2}$, cuyo dominio de definición es:

$$Dom\ f(x) = R - \{0\}$$

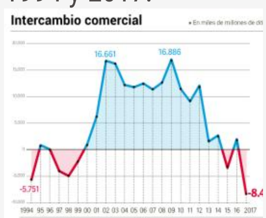
Calculamos la función derivada primera:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Aunque $f'(x)$ no está definida en $x = 0$, cero no es un valor crítico porque no pertenece al dominio de f.

Un punto crítico es un "candidato" a ser extremo relativo. Puede corresponder a un máximo relativo, a un mínimo relativo o a ninguno de éstos.

Relaciona lo aprendido con la **Actividad 2** del Capítulo N°1, referida a la **Balanza Comercial Argentina** entre los períodos comprendidos entre 1994 y 2017.



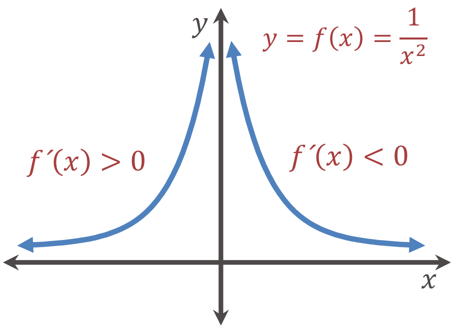


Fig. 91.: Función $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Habrá un máximo relativo cuando $x = x_0$, si $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$, al ir de izquierda a derecha, y habrá un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$ al ir de izquierda a derecha.

Si $f'(x)$ no cambia de signo, no habrá un extremo relativo cuando $x = x_0$.

Sugerimos los siguientes pasos analíticos, para encontrar extremos relativos:

1. Encontrar $f´(x)$.
2. Determinar todos los valores de x en que $f´(x) = 0$ o no existe.
3. En los intervalos sugeridos por los valores del paso 2, determinar si f es creciente $[f'(x) > 0]$ o decreciente $[f'(x) < 0]$.
4. Para cada valor crítico x_0 en que f es continua, determinar si $f´(x)$ cambia de signo cuando x crece al pasar por $x = x_0$.

A continuación, se avanza en el análisis del caso práctico de aplicación: **"Planta Embotelladora de Agua"** para visualizar los conceptos aprendidos.

Recordemos la función beneficio y su dominio de definición, en el intervalo $[0; 18]$:

$$B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x$$

Los valores de la curva en los cuales $B´(x) = 0$ (la tangente es horizontal) o cuando $B´(x) = no\ existe$ corresponden a los valores críticos de primer orden, posibles extremos relativos.

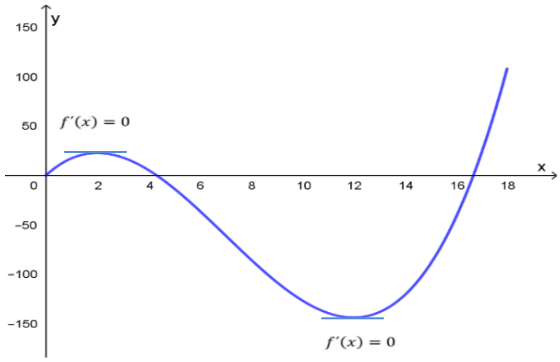


Fig. 92.: Función $B(x)$

Para determinar si estos puntos críticos son máximos o mínimos relativos, debemos analizar el comportamiento de la función en los valores cercanos al punto crítico.

Ahora bien, se desarrollará analíticamente este procedimiento siguiendo los cuatro pasos:

1. Hallar $B'(x)$

$$B'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) - 7(2x) + 24 = x^2 - 14x + 24$$

2. Determinar todos los valores de x para los que $B'(x) = 0$ o no existe.

$$B'(x) = 0$$
$$B'(x) = x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$x = 2 \;\; y\, x = 12$$

Los valores críticos de primer orden, posibles extremos relativos son $x = 2\; y\; x = 12$

3. En los intervalos sugeridos por los valores del paso 2, determinar si f es creciente $[B'(x) > 0]$ o decreciente $[B'(x) < 0]$.

En el intervalo $(0; 2)$, donde $B'(x) > 0$ la función es **creciente**.

En el intervalo $(2; 12)$, donde $B'(x) < 0$ la función es **decreciente**.

En el intervalo $(12; 18)$, donde $B'(x) > 0$ la función es **creciente.**

4. Para cada valor crítico x_0 en que f es continua, determinar si $B'(x)$ cambia de signo cuando x crece al pasar por x_0.

Hay un máximo relativo cuando $B'(x)$ cambia de $+$ a $-$, al ir de izquierda a derecha. La función beneficio de la empresa alcanza su **máximo relativo** $x = 2$

En $x = 12$, hay un **mínimo relativo**, $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$ al ir de izquierda a derecha. La función beneficio de la empresa alcanza su **mínimo relativo** $x = 12$

El estudio precedente se realizó por medio de la observación gráfica de la función, y el trazando las rectas tangentes a la curva de $B(x)$.

Para resumir y visualizar los datos obtenidos con mayor claridad, podemos volcarlos en la tabla siguiente:

Intervalos	Signo de $B'(x)$	Crecimiento/Decrecimiento de B
$(0;2)$	$+$	Crece
$(2;12)$	$-$	Decrece
$(12;18)$	$+$	Crece

Tabla N°21

5.3.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 5: Localiza de manera analítica los extremos relativos de cada una de las siguientes funciones.

i) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

ii) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

iii) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

ACTIVIDAD 6: Continúa con el análisis de las actividades 15 y 16 del Capítulo N°2. De la actividad 15 responde cuando es máximo el beneficio. De la actividad 16, cómo es el comportamiento (creciente/decreciente) de la función costo e ingreso en su dominio de definición, y de la función beneficio para qué valor de x alcanza el beneficio mínimo.

5.4 Extremos absolutos

Los extremos absolutos, a diferencia de los extremos relativos, son de naturaleza **"global"** debido a que se compara el valor de la función en un punto con todos los otros valores determinados por el dominio.

Si una función $\boldsymbol{f}$ es **continua** en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función alcanza un **valor máximo absoluto** y un **valor mínimo absoluto** en ese intervalo.

Si el dominio de una función es un **intervalo cerrado**, para determinar extremos absolutos debemos examinar la función no solo en los valores críticos, sino también en los valores extremos del intervalo.

Dada la función $y = f(x)$ **continua en** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$.

Al cumplirse la hipótesis: $\boldsymbol{f}$ **es continua en un intervalo cerrado**, se garantiza la **existencia** de **extremos absolutos** en dicho intervalo.

Los puntos destacados sobre la siguiente gráfica se presentan en $x = a, x = b$, $x = c$ y $x = d$, y corresponden a valores extremos o a valores críticos.

El máximo absoluto ocurre en el valor crítico $x = c$, y el mínimo absoluto ocurre en el valor extremo $x = a$.

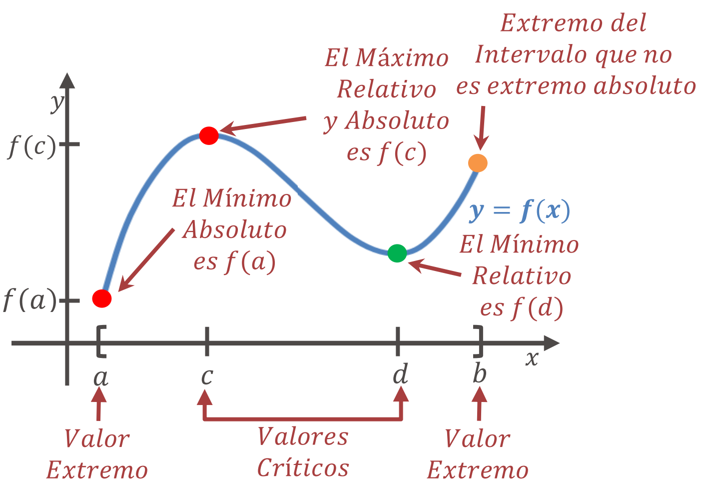
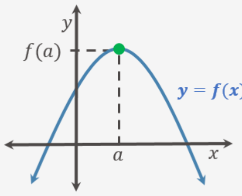


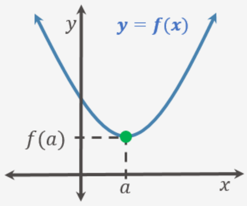
Fig. 93.: Extremos relativos y absolutos

Cuando abordamos el tema Interpretación de Gráficas (Punto 1.4.3 del Capítulo N° 1) definimos:

$\boldsymbol{f}$ alcanza un **máximo absoluto** en $x = a$ **si su ordenada** $\boldsymbol{f(a)}$ **es mayor o igual** que en cualquier otro punto del dominio de la función.



$\boldsymbol{f}$ alcanza un **mínimo absoluto** en $x = a$ si su ordenada $f(a)$ es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.



Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función $\boldsymbol{f}$ **continua en** $[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$

1. Encontrar los valores críticos de f.
2. Evaluar $f(x)$ en los valores extremos a y b, y en los valores críticos del intervalo $(a;\ b)$.
3. El valor máximo de f es el mayor de los valores encontrados en el **paso 2**. El valor mínimo de f es el menor de los valores encontrados en el **paso 2**.

Si existe, un **máximo** o **mínimo absoluto** es **único**; sin embargo, puede ocurrir para **más de un valor de** $\boldsymbol{x}$.

Retomando el caso práctico de aplicación: "**Planta Embotelladora de Agua"**, la cual procesa 18 mil litros de agua por día en sus diferentes tipos de envases. La función que representa el beneficio, expresada en miles de pesos, viene dada por:

$$B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x$$

2. ¿Con qué nivel de procesamiento se alcanza el máximo beneficio y a que monto asciende?
3. ¿Cuándo el beneficio es mínimo y a que monto asciende?

Se procederá, entonces, a realizar los pasos correspondientes para encontrar los extremos absolutos de una función $\boldsymbol{f}$ **continua en** $[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$

Paso 1. Encontrar los valores críticos de $\boldsymbol{B}$.

Los puntos críticos de primer orden obtenidos en el punto 5.2 fueron:

$$x = 2 \text{ y } x = 12$$

Paso 2. Evaluar en $\boldsymbol{B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x}$ **los extremos** $\boldsymbol{a}$ **y** $\boldsymbol{b}$**, y los valores críticos** $\boldsymbol{x = 2}$ **y** $\boldsymbol{x = 12}$.

$$B(0) = 0\,;\, B(2) = 22{,}66\,;\ B(12) = -144\,;\, B(18) = 108$$

Paso 3. El valor máximo de $\boldsymbol{B}$ **es el mayor de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de** $\boldsymbol{B}$ **es el menor de los valores encontrados en el paso 2.**

El **máximo absoluto** de la función beneficio se presenta en el extremo del intervalo cuando $x = 18$ y el monto al que asciende el beneficio en ese valor es de $\$108000$, es decir, **la empresa obtiene su máxima ganancia en los** $\boldsymbol{18000}$ **litros embotellados y vendidos.**

El **mínimo absoluto** de la función beneficio se presenta en el extremo relativo $x = 12$, **la empresa obtiene pérdidas en ese valor mínimo, y su máxima perdida alcanzada es de** $\boldsymbol{\$144000}$.

5.4.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 7: Localiza analíticamente los extremos absolutos de cada una de las siguientes funciones cuyo dominio de definición es $[-1; 4]$.

i) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

ii) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

iii) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

ACTIVIDAD 8: Dada la función de beneficio: $B(x) = -x^2 + 60x - 500$, utiliza el análisis diferencial para hallar máximos o mínimos relativos y absolutos, en el intervalo $[0; 60]$.

5.5 Concavidad y Convexidad de una función. El criterio del signo de la derivada segunda para determinar intervalo de concavidad y convexidad de la función

La primera derivada, f', nos proporciona información útil para el trazado de curvas. Se usa para determinar cuándo una función, f, es creciente o decreciente y para la localización de máximos y mínimos relativos. Sin embrago, para conocer la verdadera forma de una curva se necesita más información. Para ello se debe ampliar el análisis de la función, f y la función derivada primera, f', interpretando el **signo de la función derivada segunda**, $\boldsymbol{f''}$**.**

La **Primera Derivada** $\boldsymbol{f'(x)}$ de una función $\boldsymbol{f}$ representa la **Razón Instantánea de Cambio** de $\boldsymbol{f}$ y nos informa acerca del Ritmo Instantáneo de Cambio de $\boldsymbol{f}$ en cada uno de sus puntos.

La **derivada segunda**, f'',representa la **razón o el ritmo de instantáneo cambio** de la derivada primera, f'. Informa también acerca **del ritmo al que está creciendo o decreciendo** la función $\boldsymbol{f}$.

Con el signo de la derivada segunda, se obtiene información de la función original y de la derivada primera de la función.

✓ Si la **derivada segunda** de la función $\boldsymbol{f}$ es **positiva** en un intervalo $(a; b)$: La función es **cóncava hacia arriba o convexa**, es decir, el ritmo al que crece o decrece la función es **creciente**. En ese intervalo la **derivada primera de la función crece.**

Si $f''(x) > 0$

$f'(x)$ es **creciente**

$f(x)$ es **cóncava hacia arriba o convexa**

Si se trazan rectas tangentes a la curva, la curva quedará por encima de ellas.

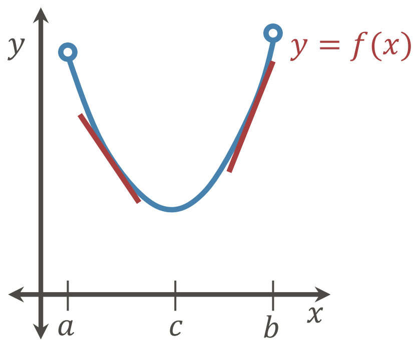


Fig. 94.: Función cóncava hacia arriba o convexa

Si se observa la Fig. 93, en el intervalo $(a; c)$ la función f, **decrece a ritmo creciente** y en el intervalo $(c; b)$ **crece a ritmo creciente**.

Al observar la gráfica, las pendientes de las rectas tangentes a la curva pasan de valores menores a mayores, por lo que se concluye que el ritmo de cambio de $y = f(x)$ es creciente.

Como $\boldsymbol{f'}$ es creciente, cuando su derivada $\boldsymbol{f''(x)}$ es **positiva**. Es posible establecer:

Sea f' diferenciable en el intervalo $(a; b)$. Si $f''(x) > 0$ para toda x en $(a; b)$, entonces $\boldsymbol{f}$ es **cóncava hacia arriba o convexa** en $(a; b)$.

- ✓ Si la **Derivada Segunda** de la función $\boldsymbol{f}$ es negativa en un intervalo $(a; b)$:La función es **cóncava hacia abajo o cóncava**, es decir, el ritmo al que crece o decrece la función es **decreciente**. En ese intervalo la **derivada primera de la función decrece.**

Si $f''(x) < 0$

$f'(x)$ es **decreciente**

$f(x)$ es **cóncava hacia abajo o cóncava**

Si se trazan rectas tangentes a la curva, la curva quedará por debajo de ellas.

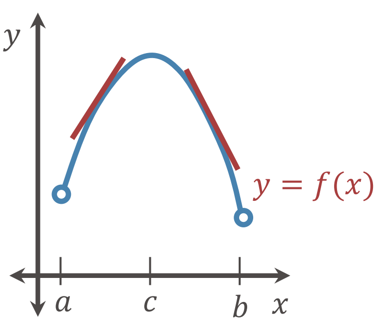


Fig. 95.: Función cóncava hacia abajo o cóncava

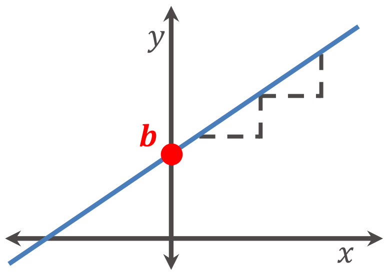
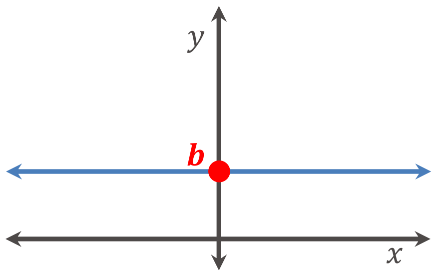
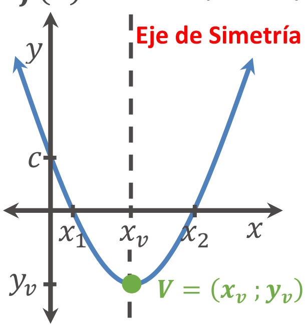
Si se observa la Fig. 94, en el intervalo $(a; c)$ la función f, **crece a ritmo decreciente** y en el intervalo $(c; b)$ **decrece a ritmo decreciente**.

Al observar la gráfica, las pendientes de las rectas tangentes a la curva pasan de valores mayores a menores, por lo que se concluye que el ritmo de cambio de $y = f(x)$ es decreciente.

Como f' es **decreciente**, cuando su derivada $f''(x)$ es **negativa**. Es posible establecer:

Sea f' diferenciable en el intervalo $(a;b)$. Si $f''(x) < 0$ para toda x en $(a;b)$, entonces f es **cóncava hacia abajo o cóncava** en $(a;b)$.

Observa los gráficos de las funciones estudiadas en el Capítulo N°2 y determina su concavidad o convexidad.

Función	**Intervalo**	**Signo de $f''(x)$**	**Concavidad o convexidad de $f(x)$**
$f(x) = m.x + b$ 			
$y = b$ 			
$f(x) = a.x^2 + b.x + c$ 			

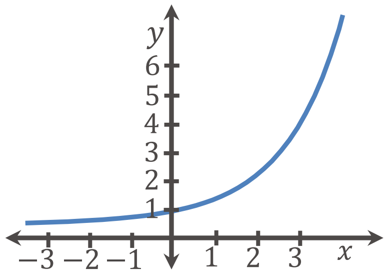
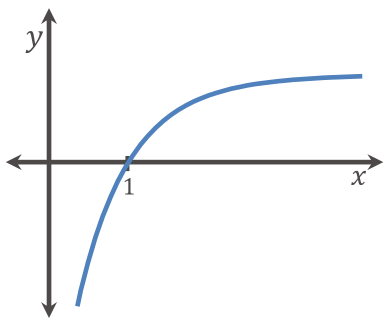
Función	Intervalo	Signo de $f''(x)$	Concavidad o convexidad de $f(x)$
$f(x) = b^x$ 			
$f(x) = log_b(x)$ 			

Tabla N°22

5.6 Puntos críticos de segundo orden

El signo de la derivada segunda, f'' nos informa acerca de la concavidad o convexidad de la función, f. Ahora bien, debemos conocer a partir de qué valor de x, del dominio de f, la función cambia su comportamiento, pasa de ser cóncava a ser convexa y viceversa. Si observamos la Fig. 96:

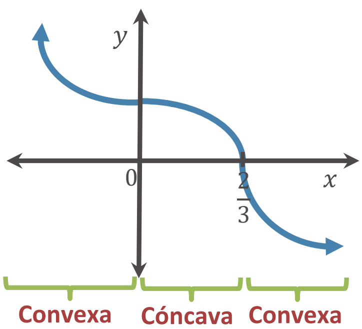


Fig. 96.: Función $f(x)$

El dominio de la función $\boldsymbol{f}$ son todos los reales, y los intervalos del dominio donde $\boldsymbol{f}$ cambia de concavidad son:

Intervalos	Signo de $f''(x)$	Concavidad o convexidad de $f(x)$
$(-\infty; 0)$	$+$	Convexa
$\left(0; \frac{2}{3}\right)$	$-$	Cóncava
$\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$	$+$	Convexa

Tabla N°23

¿Qué sucede en $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$?

……

……

………

Estos valores del dominio de f se llaman **valores críticos de segundo orden**.

Puntos críticos de segundo orden

Si $x = x_0$ pertenece al dominio de f y $f''(x_0) = 0$ ó $f''(x_0)$ no existe, entonces $x = x_0$ se denomina **valor crítico** de f.

Si $x = x_0$ es un valor crítico, entonces el punto $(x_0; f(x_0))$ se denomina **punto crítico de segundo orden**.

Retomemos la actividad trabajada **"Planta Embotelladora de Agua"**, estamos en condiciones de responder las siguientes preguntas:

4. ¿A qué ritmo está creciendo el beneficio?
5. ¿A qué ritmo decrece el beneficio?

Para encontrar los intervalos de análisis, necesitamos los puntos críticos, de primer orden y segundo orden.

Los valores críticos de primer orden ya calculados anteriormente son: $x = 2 \ y \ x = 12$

Se calcula el valor crítico de segundo orden:

$$B''(x) = 2x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = 7$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función y los puntos críticos de primer y segundo orden se establecen los intervalos.

Intervalos			
$(0;2)$	$(2;7)$	$(7;12)$	$(12;18)$

Tabla N°24

Determinamos el signo de la derivada segunda para el intervalo $(0;2)$, para ello, se evalúa algún valor dentro del intervalo, en este caso se selecciona $x=1$, no obstante, se podría haber elegido cualquier otro valor dentro del intervalo y se reemplaza en $B''(x)$, $B''(1)<0$ en dicho intervalo. Entonces se concluye que en el intervalo la derivada segunda es negativa, por lo tanto, la función es cóncava.

En el intervalo $(2;7)$, se reemplaza $x=3$ en $B''(x)$,el signo de la derivada segunda de la función es negativo, $B''(3)<0$, por lo tanto, la función es cóncava.

En el intervalo $(7;12)$, se reemplaza $x=10$, en $B''(x)$ el signo de la derivada segunda de la función es positivo, $B''(10)>0$, la derivada segunda es positiva por lo tanto la función es convexa.

En el intervalo $(12;18)$, se reemplaza $x=14$, el signo de la derivada segunda de la función es positivo, $B''(14)>0$, la derivada segunda es positiva por lo tanto la función es convexa.

A continuación, se presentan las conclusiones obtenidas en una tabla que resume la situación:

Intervalos	Signo de $f''(x)$	Concavidad o convexidad de $f(x)$
$(0,2)$	$-$	Cóncava
$(2,7)$	$-$	Cóncava
$(7,12)$	$+$	Convexa
$(12,18)$	$+$	Convexa

Tabla N°25

Para comprobarlo, analíticamente, deberás hallar los intervalos donde la derivada segunda es positiva se debe plantear la siguiente desigualdad:

$$B''(x)=2x-14>0 \Leftrightarrow x>7$$

$\therefore$ $(7;18]$ (recuerda el contexto del problema)

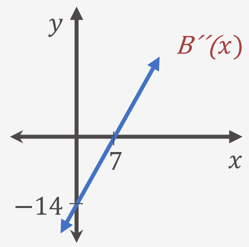
Para hallar los intervalos donde la derivada segunda es negativa se debe plantear la siguiente desigualdad:

$$B''(x)=2x-14<0$$

$$x<7$$

$\therefore$ $[0;7)$ (recuerda el contexto del problema)

Para hallar los intervalos de positividad y negatividad de la derivada segunda. Se puede analizar el **signo de $B''(x)$**, gráficamente, **analíticamente**, por medio del cálculo de la derivada segunda. Posteriormente se volcaron los datos obtenidos en una **tabla**.



2. ¿A qué ritmo está creciendo el beneficio?
3. ¿A qué ritmo decrece el beneficio?

El ritmo de crecimiento o decrecimiento de la función se obtiene a partir del signo de la derivada segunda.

El intervalo que la función crece es: $(0;2) \cup (12;18)$

En el intervalo $(0;2)$ la función crece a ritmo decreciente, es decir que la función es cóncava en dicho intervalo porque la derivada segunda es negativa.

En el intervalo $(12;18)$, la función crece a ritmo creciente, es convexa, porque la derivada segunda es positiva.

El intervalo en que la función decrece es: $(2;7) \cup (7;12)$

En el intervalo $(2;7)$ la función decrece a ritmo decreciente, es decir que la función es cóncava.

En el intervalo $(7;12)$ la función decrece a ritmo creciente, es decir que la función convexa.

Intervalos	Signo de $B'(x)$	Crecimiento o decrecimiento de $B(x)$	Signo de $B''(x)$	Crecimiento o decrecimiento de $B'(x)$	Concavidad o convexidad de $B(x)$
$(0,2)$	$+$	Crece	$-$	Decrece	Cóncava
$(2,7)$	$-$	Decrece	$-$	Decrece	Cóncava
$(7,12)$	$-$	Decrece	$+$	Crece	Convexa
$(12,18)$	$+$	Crece	$+$	Crece	Convexa

Tabla N°26

Los datos volcados en la Tabla N°27 permiten trazar la curva de la función beneficio $B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x$.

Anteriormente se esbozó la gráfica de la función con GeoGebra debido a que aún no se conocía la información que proporcionaba la primera y segunda derivada. Por medio del **estudio diferencial de la función beneficio** se determinó que la **primera derivada** informa cuándo una función es creciente o decreciente, y para localizar los máximos y mínimos relativos. Por su parte, la **segunda derivada**, se usa para determinar la concavidad o convexidad y los puntos de inflexión de la función y el crecimiento o decrecimiento de la función derivada primera.

Cuando abordamos el tema **Análisis Marginal en Economía** (Punto 4.3 del Capítulo N° 4) definimos:
El **beneficio marginal** se calcula hallando la **derivada** de la función beneficio y es una **buena aproximación** al beneficio real de **producir y vender una unidad adicional**.

4. ¿Cuándo el beneficio marginal es nulo?
5. ¿Cuándo decrece y cuando crece el beneficio marginal?

Se debe recordar lo estudiado en el Capítulo N°4, y encontrar el Beneficio Marginal, que se calcula obteniendo la derivada primera de la función beneficio.

Para encontrar cuando es nulo el beneficio marginal, se iguala a cero la función.

$$B'(x) = Beneficio\ Marginal(x) = Bmg(x) = 0$$

Cuándo crece o decrece el beneficio marginal, se obtiene a partir de la derivada primera de la función beneficio marginal y se analiza su signo.

$$B'(x) = Bmg(x) = x^2 - 14x + 24$$

$$B''(x) = Bmg'(x) = 2x - 14$$

Se halla el punto crítico de primer orden:

$$B''(x) = Bmg'(x) = 2x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = 7$$

El intervalo del dominio de la función $B(x)$ es $[0; 18]$

Si se analiza el intervalo $(0; 7)$, y se evalúa la derivada primera del beneficio marginal en algún valor de dicho intervalo, por ejemplo, en $x = 5$, $Bmg'(5) = 2.5 - 14 = -4$, es negativa en el intervalo $(0; 7)$, por tanto, la función beneficio marginal decrece en ese intervalo.

Si se analiza el intervalo $(7; 18)$, y se evalúa la derivada primera del beneficio marginal en algún valor del intervalo, por ejemplo, en $x = 10$, $Bmg'(10) = 2.10 - 14 = 6$, es positiva en el intervalo $(7; 18)$, entonces la función beneficio marginal crece en ese intervalo.

Intervalos	Signo de $Bmg'(x)$	Crecimiento o decrecimiento de $Bmg(x)$
$(0, 7)$	$-$	Decrece
$(7, 18)$	$+$	Crece

Tabla N°27

5.6.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 9: Se te solicita que determines los puntos críticos de segundo orden y analices la concavidad o convexidad de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{i})$	$f(x) = -2x^2 + 4x + 3$	$\boldsymbol{iv})$	$f(x) = 5^x$
$\boldsymbol{ii})$	$f(x) = ln\, x$	$\boldsymbol{v})$	$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$
$\boldsymbol{iii})$	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$	$\boldsymbol{vi})$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$

ACTIVIDAD 10: Determina la concavidad o convexidad de las funciones $B(x)$ de las actividades 15 y 16 del Capítulo N°2.

ACTIVIDAD 11:

BIO4, PLANTA DE ETANOL A BASE DE MAIZ EN RIO CUARTO

La Secretaría de Energía de la Nación acordó un cupo de 50 mil metros cúbicos anuales para la producción de etanol a base de maíz a Bio4 SA.

Bio4 es una empresa agroindustrial cuya visión es AGREGAR VALOR a los granos producidos en la región. La transformación de granos en alimentos y energía es la principal actividad desarrollada por la compañía.

La adjudicación, contenida en la resolución 553/201, es la primera a la que tienen acceso productores cordobeses interesados en la elaboración de biocombustibles de origen vegetal, en este caso a base de maíz.

Por su parte, la representante de FADA[9] reveló que el valor bruto de la producción agrícola del departamento Río Cuarto creció en el año 2017, en pesos, un 130 por ciento. Este aumento, influido por la suba del precio de la soja y la eliminación de retenciones, equivale a más de cinco presupuestos (año 2016) de la ciudad de Río Cuarto, la mayor del interior cordobés, con 170 mil habitantes.

A raíz de esta noticia, desde la cátedra surgió el interés de conocer el rendimiento en la producción de maíz en la zona del gran Río Cuarto y su modelización en un problema de Análisis Matemático. Para ello nos reunimos con docentes de la asignatura de Producción de Cereales de la FAyV[10] de la UNRC, quienes brindaron información acerca del rendimiento de la producción de maíz por hectárea, en función de la densidad de semillas en el Gran Río Cuarto:

[9] Fundación Agropecuaria para el Desarrollo de Argentina.
[10] Facultad de Agronomía y Veterinaria.

Densidad de semillas $(semillas/ha)$	Rendimiento en Kg de semilla (kg/ha)	Rendimiento por semilla $(Kg/Semilla)$
20000	8000	$0,4$
40000	10000	$0,25$
60000	10700	$0,178333333$
80000	9200	$0,115$
100000	8400	$0,084$

Se te solicita que:

a) Identifiques la variable independiente y su unidad de medida.

b) Utilices la planilla de cálculo Excel para graficar:

$b.1)$La densidad de semillas y el rendimiento en kg de semilla por hectárea.

$b.2)$La densidad de semillas y el rendimiento por semilla.

Para confeccionar los gráficos, transcribe en una **planilla de Excel** los datos brindados en la tabla y utiliza la herramienta **Insertar Gráfico** (debes haber seleccionado las columnas correspondientes) y dentro de ella la opción **Gráfico de Dispersión**. Con la herramienta, **Formato de Línea de tendencia**, selecciona la opción: **Presentar Ecuación en el Gráfico.**

Luego, responde:

c) Observando los gráficos obtenidos en el punto anterior, identifiques a cuál de las funciones estudiadas en el Capítulo N° 2, se asemejan estas curvas.

Actualmente, el costo de la bolsa de 80.000 semillas de maíz es de $\$4.000$ y el ingreso que se obtiene de la venta de maíz, descontado fletes y comisiones, es de $\$2{,}2\ Kg$. Se te solicita que:

d) Completes el siguiente cuadro:

Densidad de semillas $(semillas/ha)$	Rendimiento en Kg de semilla (kg/ha)	Costo de la semilla $(\$/ha)$	Ingreso Bruto $(\$/ha)$	Retorno[11] por semillas $(\$/ha)$
20000	8000			
40000	10000			
60000	10700			
80000	9200			
100000	8400			

[11] La Función Retorno en las Ciencias Agropecuarias equivale a lo que nosotros llamamos Función Beneficio $(Beneficio = Ingreso - Costos)$

- **e)** Representes gráficamente el **Costo de la semilla**, el **Ingreso Bruto** y el **Retorno**, realizando el mismo procedimiento que en el inciso $\boldsymbol{b}$).
- **f)** Observes las curvas y determines el tipo de función.
- **g)** Determines la función **Costo Marginal**. ¿Qué información te brinda?
- **h)** Utilices la función derivada y calcules cuando el **Retorno** es **máximo.**
- **i)** Determines cómo es el ritmo de cambio de la función Retorno e intérpretes económicamente su resultado.

5.7 Punto de Inflexión

Para hallar los **puntos de inflexión** en una función $\boldsymbol{f}$, se deben encontrar primero los valores de x donde $\boldsymbol{f''(x) = 0}$ o **no existe**. Esos valores de x determinan los intervalos de análisis. Si la concavidad cambia alrededor de uno de esos valores de x y $\boldsymbol{f}$ es continua allí, **manteniéndose el signo de $\boldsymbol{f'}$ o el comportamiento creciente o decreciente de $\boldsymbol{f}$** alrededor de ese valor, la función f presenta un **punto de inflexión**.

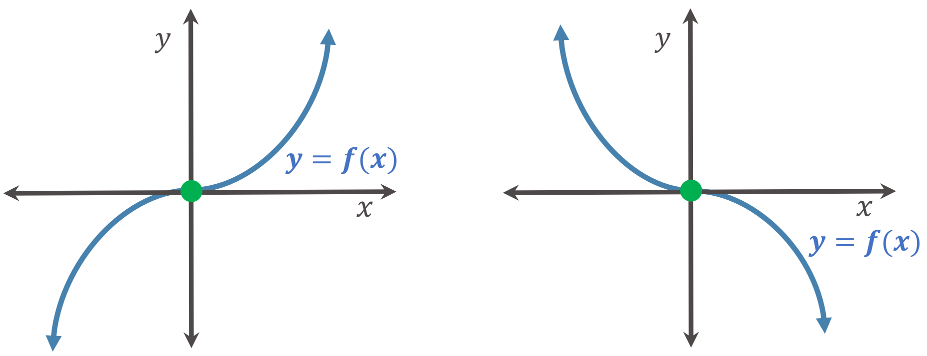


Fig. 97.: Función cóncavas y convexas.

El requisito de **continuidad** implica que el valor de x debe estar en el dominio de la función.

Condición Necesaria para la existencia de puntos de inflexión.

Si $x = x_0$ pertenece al dominio de f y f tiene un **punto de inflexión** cuando $x = x_0$, entonces $\boldsymbol{f''(x_0) = 0}$ o bien $\boldsymbol{f''(x_0)}$ **no existe.**

La implicancia de la regla sólo es una dirección:

$$\left.\begin{matrix} Punto \\ de\ Inflexión \\ en\ x = x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f''(x_0) = 0 \\ ó \\ f''(x_0)\ no\ existe \end{matrix}\right.$$

Es decir**, todo punto de inflexión ocurre en valor crítico de segundo orden, pero no todo valor crítico de segundo orden es un punto de inflexión**.

Para determinar la concavidad o convexidad de una función y sus puntos de inflexión, hay que encontrar primero los puntos críticos de segundo orden, es decir, los valores de x donde $f´´(x)$ es cero o no existe.

Esos valores de x determinan intervalos. En cada intervalo se analiza si $f´´(x) > 0$,f es convexa, o $f´´(x) < 0$, f es cóncava.

Si la concavidad o convexidad cambia alrededor de uno de esos valores de x y el signo de $f´(x)$ se mantiene, y f es continua allí, entonces f tiene un punto de inflexión en ese valor x.

Criterio para puntos de inflexión

Dada f **continua** en un intervalo abierto $(a; b)$, que contiene el **valor crítico de segundo orden** $x = x_0$ y f **derivable** en $(a; b)$ excepto posiblemente en $x = x_0$.

Si $f''(x)$ cambia de positiva a negativa o viceversa al pasar por x_0 , es decir, f cambia de concavidad en $x = x_0$, manteniéndose el signo de $f´$, o lo que es lo mismo, el comportamiento creciente o decreciente de f, **entonces** $\boldsymbol{x} = x_0$ tiene un **punto de inflexión** en $x = x_0$.

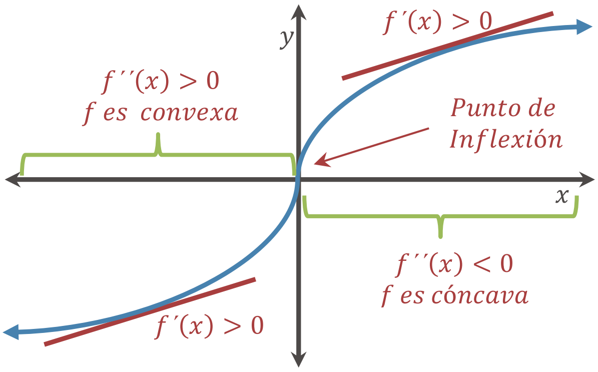


Fig. 98.: Punto de Inflexión

A través de un ejemplo simple podemos dar significado al punto de inflexión en las ciencias económicas.

Supone que un lote de 100 hectáreas, en donde el factor clima acompaña a largo plazo. En la primera campaña se siembra soja con el sistema tradicional, en la segunda campaña se realiza a través de siembra directa, en la tercera se incorporan herbicidas y semillas resistentes a la fumigación. A lo largo de diez campañas se siembra soja sin rotar los suelos.

El rendimiento del lote al comienzo fue creciendo, pero luego ese crecimiento dejo de crecer a un ritmo creciente y creció a un ritmo decreciente, como se observa en la Fig. 99.

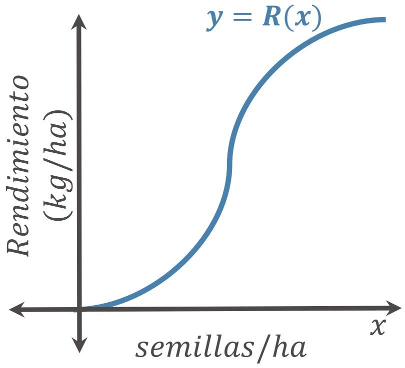


Fig. 99.: Función rendimiento $y = R(x)$

La siembra directa es una técnica de cultivo sin alteración de suelo mediante arado.
Las ventajas tienen que ver con un mejor aprovechamiento del agua, incremento de la materia orgánica, mantenimiento y recuperación de la estructura de los suelos y simplicidad de manejo.

El gráfico refleja que, al comienzo, cuando se implementaron acciones para una mejora en el rendimiento de la cosecha, los mismos **crecieron a ritmo creciente**, es decir a un ritmo cada vez más rápido. La falta de rotación del cultivo en el lote, provoco que los rendimientos crecieran, pero cada vez más lentos, a un **ritmo de crecimiento decreciente.**

En relación a lo anterior, si se retoma la Actividad 11, y se observa la tabla: ¿Qué sucede con el rendimiento de la semilla?

Densidad de semillas $(semillas/ha)$	Rendimiento en Kg de semilla (kg/ha)	Rendimiento por semilla $(Kg/Semilla)$
20000	8000	$0,4$
40000	10000	$0,25$
60000	10700	$0,178333333$
80000	9200	$0,115$
100000	8400	$0,084$

Tabla N°28

La incorporación de mayor cantidad de semillas por hectárea se traduce en mayor rendimiento hasta un cierto punto. Esto es lo que se denomina en economía **"Ley de rendimientos marginales decrecientes"**, incrementar la cantidad de un factor productivo en la producción de un bien o un servicio, provoca que el rendimiento de la producción sea menor a medida que se incremente ese factor, siempre y cuando se mantengan el resto de los factores a nivel constante (ceteris paribus).

Se retoma el caso práctico de aplicación **"Planta Embotelladora de Agua"** y se busca los valores de x donde $f''(x)$ es cero o no está definida (condición necesaria para la existencia de punto de inflexión).

Ese valor de x es, $x = 7$. En cada intervalo analizado anteriormente, se determina si $B''(x) > 0$, f es convexa o $B''(x) < 0$, f es cóncava.

Alrededor de $x = 7$, la función cambia de convexa a cóncava y la derivada primera de la función mantiene su signo. Entonces, la función beneficio, $B(x)$, tiene un punto de inflexión en ese valor de x.

¿Económicamente qué significado tiene el punto de inflexión obtenido?

………

………

……

Lo analizado en el caso práctico de aplicación "Planta Embotelladora de Agua" referido a: cálculo de los puntos críticos de primer y segundo orden, extremos, crecimiento y decrecimiento, convexidad y concavidad, puntos de inflexión, corresponde a lo que se llama **estudio diferencial de una función.**

5.7.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 12: Localiza los puntos de inflexión de cada una de las siguientes funciones, realiza el estudio diferencial completo con los datos obtenidos en las actividades anteriores y luego esboza la gráfica.

$i)$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

$ii)$ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

ACTIVIDAD 13: Las gráficas representan los rendimientos de soja de dos lotes de 100 hectáreas cada uno, en donde el factor tiempo acompaño favorablemente las campañas. En el lote 2 de la $Fig.b$, se realizaron rotación de cultivos de invierno. En ambos lotes se fue mejorando gradualmente los sistemas de producción, la semilla y los herbicidas utilizados.

La **rotación de cultivos** es una estrategia que aporta sustentabilidad a los sistemas productivos de la región pampeana.
La incorporación de **cultivos de invierno** como trigo, cebada o centeno, son parte de las estrategias para mayores rindes, permitiendo competir con malezas de difícil control y mejorar las condiciones físicas y químicas de los lotes.

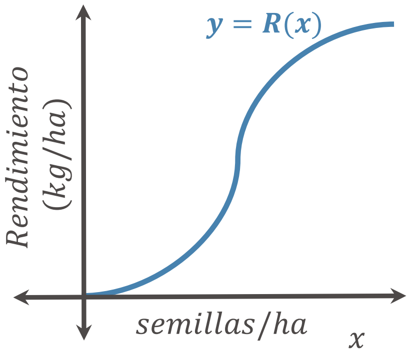


Fig. a): Lote 1

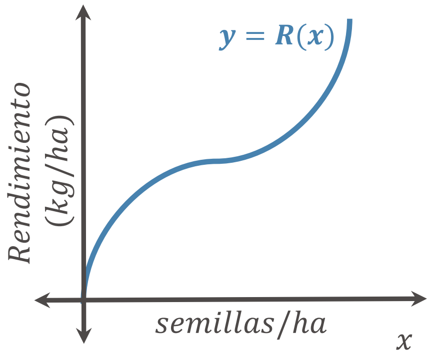


Fig. b): Lote 2

a) Analiza e interpreta cómo es el ritmo de crecimiento del rendimiento de cada lote.

b) ¿Qué información económica brinda el punto de inflexión en cada caso?

5.8 Criterio de la segunda derivada para la determinación de extremos relativos

La segunda derivada proporciona también un medio para probar si ciertos valores críticos corresponden a valores extremos relativos.

Si se observa la Fig. 100, en $x = a$ se tiene una tangente horizontal; esto es $f'(a) = 0$. Además, alrededor de $x = a$ la función es cóncava, esto es, $f''(a) < 0$. Lo anterior lleva a concluir que habrá un máximo relativo en $x = a$.

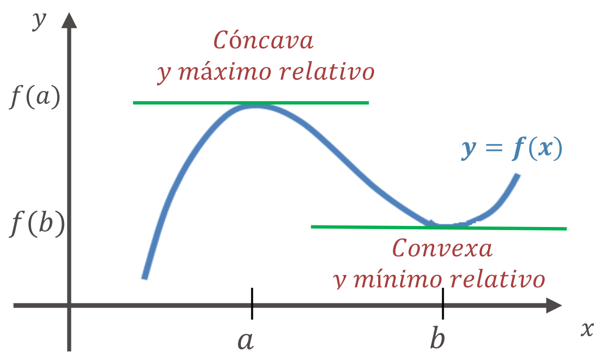


Fig. 100.: Relación de la concavidad con los extremos relativos

Por otra parte, alrededor de $x = b$ la función es convexa, esto es, $f''(b) > 0$. Como la recta tangente es horizontal en $x = b$, se concluye que ahí existe un mínimo relativo.

Aunque el **criterio de la segunda derivada** puede ser muy útil, se recomienda no depender por completo de él. El criterio puede no ser aplicable, a además en ocasiones podría ser muy complicado determinar la segunda derivada.

Criterio de la segunda derivada para la determinación de extremos relativos.

Si $f''(x)$ es continua en un intervalo abierto $(a;b)$ que contiene a $x = x_0$ y $f'(x_0) = 0$ entonces:

- ✓ Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en $x = x_0$.
- ✓ Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.

El **criterio de la segunda derivada** para la determinación extremos relativos **no es aplicable** cuando:

- ✓ $f''(x_0) = 0$, ya que si tanto $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$,en $x = x_0$ puede existir un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de estos.
- ✓ Si $f'(x_0)$ no existe.

En esos casos debe usarse el **criterio de la primera derivada** para analizar que sucede en $x = x_0$.

Al igual que hemos estudiado oportunamente, también es posible conocer los extremos relativos del caso práctico de aplicación **"Planta Embotelladora de Agua"** utilizando este criterio.

8. ¿Con qué nivel de procesamiento se alcanza el máximo beneficio y a que monto asciende?
9. ¿Cuándo el beneficio es mínimo y a que monto asciende?

Habiendo hallado los valores críticos de primer orden: $x = 2$ y $x = 12$.

- ✓ La función beneficio tiene un **Máximo Relativo** en $x = 2$, debido a que $B''(2) < 0$.
- ✓ La función beneficio tiene un **Mínimo Relativo** en $x = 12$, ya que $B''(12) > 0$.

5.8.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 14: Localiza los extremos relativos de cada una de las siguientes funciones por el criterio de la segunda derivada.

i) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

ii) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

iii) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

<u>ACTIVIDAD 15:</u> Esboza las gráficas de las siguientes funciones si se conoce que presentas las siguientes características:

i)

$$Dom f = \mathbb{R}$$
$$f(2) = f(4) = 0$$
$$f'(x) > 0 \; si \; x < 3$$
$f'(3)$ no está definida.
$$f'(x) < 0 \; si \; x > 3$$
$$f''(x) > 0, x \neq 3$$

ii)

$$Dom f = [-3; 3]$$
$$f(0) = f(2) = 0$$
$$f'(x) < 0 \; si \; -3 \leq x < 1$$
$$f'(1) = 0$$
$$f'(x) > 0 \; si \; 1 < x \leq 3$$
$$f''(x) > 0 \; si \; x \in (-3; 3)$$

<u>ACTIVIDAD 16</u>: Con la siguiente información:

La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[0; 100]$, derivable en $(0; 100)$ y presenta un mínimo relativo en $x = 50$.

Su derivada segunda es positiva en el intervalo $(0; 100)$.

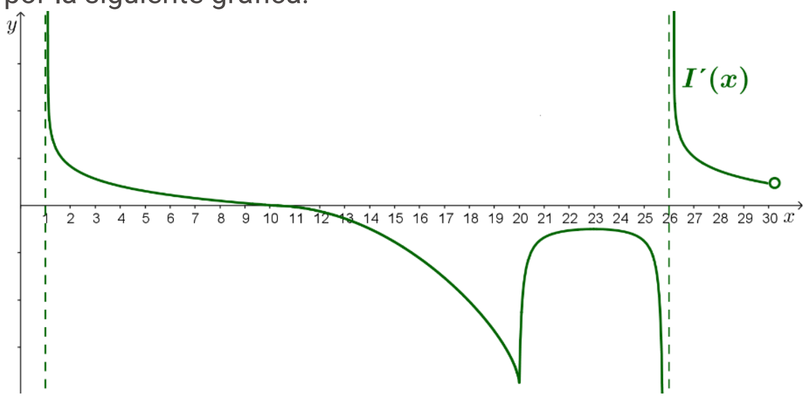
Se te solicita que respondas los siguientes interrogantes justificando, en forma completa, con los conocimientos teóricos correspondientes (puedes ayudarte confeccionando una tabla):

a) ¿Es creciente o decreciente la función (x) en el intervalo $(50; 100)$? Enuncia el criterio que permite justificar tu respuesta.

b) Es posible afirmar la existencia de extremos absolutos, ¿Por qué?

c) ¿En qué intervalo la función decrece a ritmo creciente?, ¿en algún intervalo de $(0; 100)$ la función crece a ritmo decreciente?, ¿Por qué?

<u>ACTIVIDAD 17</u>: El **ritmo al que cambian los ingresos** $(\boldsymbol{I'(x) = Img(x)})$ de una empresa en función del precio de las unidades vendidas (x) viene dado por la siguiente gráfica:



Además, la empresa debe vender a un precio superior a $\$1$ e inferior a $\$30$.

Luego de que observes el gráfico de la función $I'(x)$, se te solicita que completes la siguiente tabla y respondas las consignas:

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Crecimiento o decrecimiento de $f(x)$	Signo de $f''(x)$	Crecimiento o decrecimiento de $f'(x)$	Concavidad o convexidad de $f(x)$
$(1;10)$					
$(10;20)$					
$(20;23)$					
$(23;26)$					
$(26;30)$					

a) Escribas simbólicamente el intervalo del dominio para el cual tienen sentido el análisis de la situación problemática.

b) Determines cuál ha sido el precio en que se produjo el máximo o mínimo relativo del ingreso. Justifica tu respuesta.

c) Si $I'(3) = 2.5$, interpreta económicamente el cambio aproximado en el ingreso frente a esta situación.

d) Interpretar el significado económico de $x = 20$.

5.9 Diferencial de una función

El **Diferencial de una Función** aproxima el **incremento absoluto** de la función, Δy.

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable de x, y sea Δx un cambio en x, donde Δx puede ser cualquier número real. Entonces, el diferencial de y, se denota por dy, esta dado por:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Para comprender la definición de diferencial, recordemos algunos conceptos estudiados en el Capítulo N° 4:

Cuando **relacionamos los incrementos**, para medir cuánto varía una variable con relación a la variación de la otra, obtenemos **Variaciones Relativas**. Como Δy expresa el cambio en la función, y Δx el cambio en la variable independiente, su **cociente** informa acerca de cuánto **está cambiando en Promedio la Función por cada unidad de variación de la variable independiente.**

En símbolos: La variación de $\boldsymbol{y}$ con respecto $\boldsymbol{x}$

$$T.V.M. = \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}$$

A su vez, el límite de ese cociente cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

El incremento de la variable independiente es igual a su diferencial.

$$\boldsymbol{\Delta x = dx}$$

Si $y = x$, su diferencial por definición es:

$$\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{1} \cdot \Delta \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{dx} = \Delta \boldsymbol{x}$$

dy/dx puede interpretarse como el **cociente de dos diferenciales**, o sea, dy dividido dx, o como un **símbolo para la derivada** de f en x. Es por esto que se introduce el símbolo dy/dx para denotar la derivada.

Informa sobre la **variación instantánea** de f en un determinado momento de x.

Si Δx **es pequeño** se puede afirmar la semejanza o aproximación de:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

Si despejamos Δy:

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x$$

El segundo miembro recibe el nombre de **Diferencial de una Función** y se lo denota por dy:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Permite **aproximar el incremento absoluto**, Δy

$$\Delta y \approx dy$$

Se define a dx y dy, de forma tal que su cociente, cuando $dx \neq 0$, es igual a la derivada de y respecto de x.

Si x es la variable independiente, e y, una función de x:

$$y = f(x)$$

Se adoptarán las siguientes definiciones:

El símbolo dx, se llama **"diferencial de x"**, representa cualquier número real; es decir, que dx es otra variable independiente,

Con dy, denominado **"diferencial de y"**, se designa la función de x, dx definida por:

$$dy = f'(x).dx \qquad [1]$$

Donde $f'(x)$ es la derivada de la función f en x.

Continuando con el caso práctico de aplicación **"Planta Embotelladora de Agua"**.

8. ¿Cuál será el incremento aproximado en el beneficio de su empresa si pasa de embotellar y vender 3500 a 4000 envases?

Para determinar el cambio real en la función beneficio, $B(x)$, se evalúa en $B(x)$: 3,5 y 4 (en miles de litros) y se calcula la diferencia:

$$\Delta B = B(x + \Delta x) - B(x) \qquad \text{siendo } \Delta x = 0{,}5$$

$$B(4) = \frac{1}{3} \cdot (4)^3 - 7 \cdot (4)^2 + 24\,.\,4 = 5{,}33$$

$$B(3{,}5) = \frac{1}{3} \cdot (3{,}5)^3 - 7 \cdot (3{,}5)^2 + 24\,.\,3{,}5 = 12{,}54$$

$$\Delta B = B(4) - B(3{,}5) = 5{,}33 - 12{,}54 = -7{,}21$$

Para aproximar el cambio real o absoluto, se utiliza el concepto de diferencial

$$dB = B'(x) \cdot dx \qquad \text{siendo } x = 3{,}5 \text{ y } \Delta x = dx = 0{,}5$$

$$dB = (x^2 - 14x + 24) \cdot dx$$

$$dB(3{,}5) = ((3{,}5)^2 - 14 \cdot 3{,}5 + 24) \cdot 0{,}5 \Leftrightarrow dB = -6{,}25$$

El diferencial de la función beneficio, dB, es una buena aproximación del cambio real, ΔB.

5.9.1 Interpretación Geométrica

Se realiza la interpretación geométrica del diferencial a través de la Fig. 101, en la misma se muestra la aproximación de Δy por medio del dy. Consideremos el punto P que pertenece a $y = f(x)$ y a partir de él, se traza la recta tangente L y el punto R, perteneciente a la recta tangente.

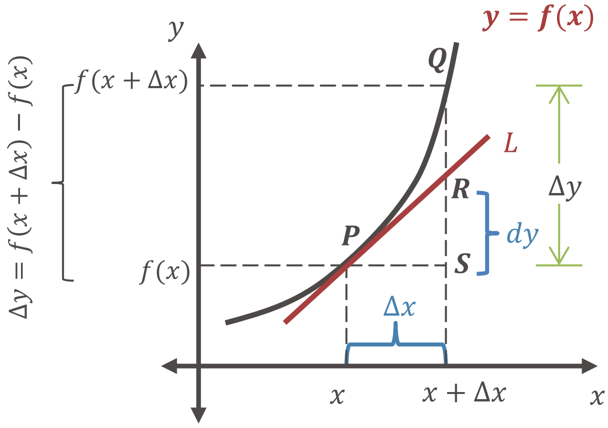


Fig. 101.: Interpretación geométrica de dy y Δx

El cambio en la función viene dado por $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, y está representado por el segmento $\overline{SQ}$. Por otro lado, el incremento en ordenada de la recta tangente está representado por el segmento $\overline{SR}$, el que al dividirlo por el cambio en la variable independiente, $\Delta x = (x + \Delta x) - x$, que está representado por el segmento $\overline{PS}$, obtenemos la pendiente de la recta tangente L es decir, $m_L = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}}$

Luego, como vimos en la Capítulo N°4, la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en x, $m_L = f'(x)$. Entonces,

$$f'(x) = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}}$$

Despejando el segmento $\overline{SR}$, nos queda:

$$\overline{SR} = f'(x).\overline{PS}$$

Observando, $\overline{SR}$, en la fig. 101, podemos afirmar que el diferencial de una función es el cambio en la altura de un punto de la recta tangente. Nos queda:

$$dy = f'(x).\Delta x = \overline{SR}$$

El incremento de la variable independiente es igual a su diferencial.
Es decir que $\Delta x = dx$
Observa que si $y = x$, su Diferencial por la definición es:

$$\boldsymbol{dx = 1.\Delta x}$$

Por lo tanto:

$$dx = \Delta x$$

Entonces el Diferencial de una función también viene dado por:

$$\boldsymbol{dy = f'(x)dx}$$

Así geométricamente el dy es el correspondiente incremento del valor de ordenada de la **recta tangente** en P. Dicho incremento se representa por $\Delta y = \overline{SQ} = f(x + \Delta x) - f(x)$, cuando x cambia en una cantidad Δx.

Con cambios suficientemente pequeños en la variable independiente, puede aproximarse tanto como se desee el diferencial de la función al incremento de la misma. Por ello, su valor puede utilizarse como una aproximación al cambio en la función cuando el cambio en la variable independiente es pequeño. Este tipo de aproximación se llama aproximación lineal, debido a que estamos utilizando la recta tangente a la curva en un punto para aproximar la gráfica de la función cerca de él. Sin embargo, de la figura es claro que:

Cuando dx es cercana a cero, dy es una aproximación a Δy. Por tanto:

$$\Delta y \approx dy$$

El dy aproxima, de manera lineal, por exceso o por defecto al Δy, dependiendo si la curva f es cóncava o convexa.

Si la función es **lineal**, la recta tangente coincide con la función $f(x)$ y ocurre que:

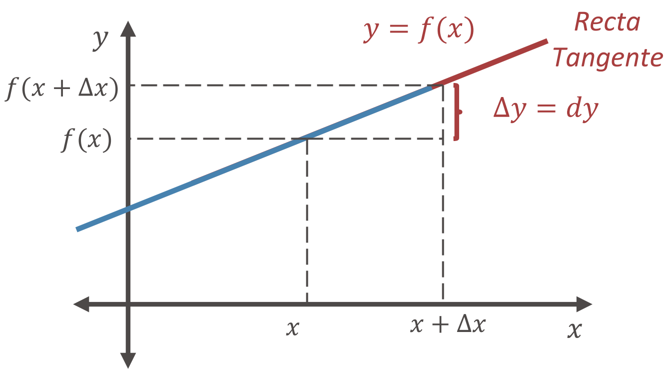


Fig. 102.: Interpretación geométrica de dy y Δx

Si la función es **convexa,** el diferencial de la función es **menor** al incremento de la función.

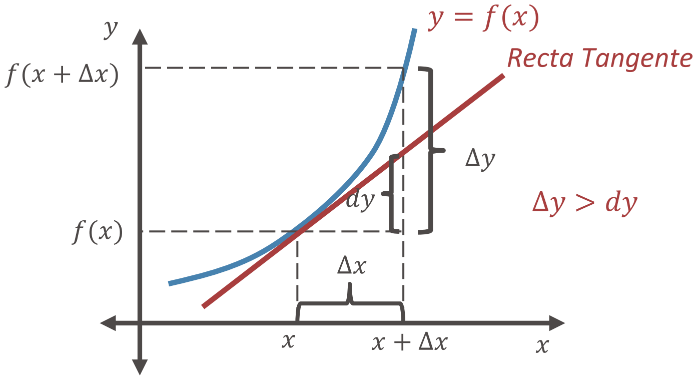


Fig. 103.: Interpretación geométrica de dy y Δx

Si la función es **cóncava,** el diferencial de la función es **mayor** al incremento de la función.

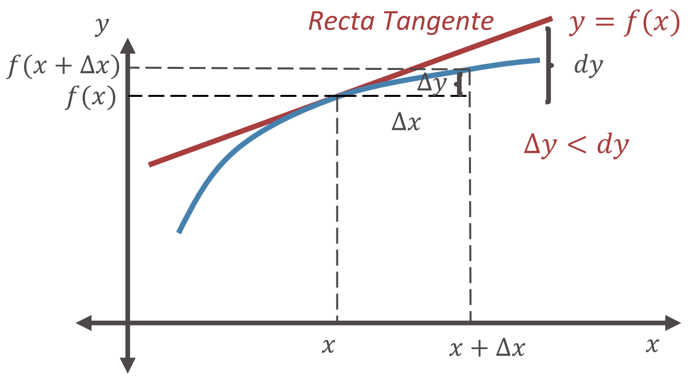


Fig. 104.: Interpretación geométrica de dy y Δx

5.9.2. El Error por Aproximación

Antes de continuar te invitamos a que revises los conceptos y reflexiones sobre el uso de la derivada

Si $f(x) = x^2$ es la expresión analítica de f, determina la tasa instantánea de cambio $\left(\frac{dy}{dx} = f'(x)\right)$ en $f(x)$ cuando $x = 3$. Utiliza la expresión analítica de la función de la gráfica de la Fig. 105.

Resolución:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2.x \Rightarrow f'(3) = 2.3 = 6$$

Si la variable independiente se incrementa en una unidad, pasando de 3 a 4, la derivada $(f'(x))$ nos informa que $f(x)$ se incrementará aproximadamente en 6 unidades. Recordemos que el procedimiento que estamos realizando es un análisis marginal de f, para cuando $x = 3$.

Al incrementar la variable independiente de $x = 3$ a $x = 4$, el cambio real será:

$$\Delta y = f(4) - f(3) = 4^2 - 3^2 = 7$$

El error por aproximación es de una unidad pues, la diferencia entre el cambio real y el aproximado es de 1 unidad.

$$\Delta y - f'(3) = 7 - 6 = 1$$

¿Cómo hallar exactamente el ritmo instantáneo en $x = 3$ y qué representa?

1. En primer lugar, debemos hallar el ritmo instantáneo de f en $x = 3$, recordando que dicho cambio representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Función	*Función Derivada*	*Ritmo instantáneo de cambio*	*Pendiente de la recta tangente a la función*
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f'(3) = 2.3 = 6$	**6**

2. Luego calcular el incremento absoluto para el cambio considerado y compararlo con la aproximación obtenida para determinar el error por la aproximación.

Cambio real	*Cambio Aproximado*	*Error por Aproximació n*
7	**6**	$\mathbf{7 - 6 = 1}$

La tasa instantánea de cambio nos permite **APROXIMAR** el cambio real para cuando $\Delta x = 1$.
En el resto de los casos, es posible calcular el error lineal por aproximación, pero en vez de utilizar la tasa instantánea de cambio, deberemos calcular el dy.

Gráficamente puede observarse que la distancia entre la función y la proyección de la línea de tangencia ilustra el error que se comete por aproximar el cambio real de la función, utilizando la derivada.

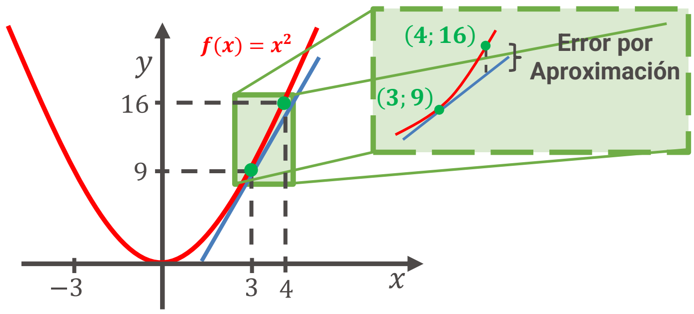


Fig. 105.: Representación geométrica del Error por Aproximación

5.9.3 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 18: Dadas las siguientes funciones:

$i)$ $f(x) = 2x^2$; $(x = 1 ; dx = 0{,}5)$

$ii)$ $f(x) = x + 2$; $(x = -2 ; dx = 0{,}4)$

$iii)$ $f(x) = \sqrt{x}$; $(x = 25 ; dx = 0{,}1)$

Calcula gráfica y analíticamente el incremento absoluto y el diferencial para los valores dados de x y dx.

ACTIVIDAD 19: La gráfica de una función $f(x)$ en el intervalo $[0; 10]$ cumple con las siguientes condiciones:

$f'(x) > 0 \ \forall x \in (0; 10)$

El incremento absoluto (Δy) es mayor al diferencial de la función (dy) $\forall x \in [0; 10]$.

Con la información disponible se te solicita que:

a) Esboces la gráfica de la función bajo estudio.

b) Señales el segmento que representa geométricamente el diferencial de la función (dy) y el segmento que representa el incremento absoluto (Δy) para $x = 5$ y $dx = 0{,}5$.

c) Determines cuál es el signo de la derivada segunda en el intervalo $(0; 10)$.

CAPÍTULO Nº6:

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES - TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL - REGLA DE L'HOSPITAL

Objetivos:

Al finalizar el sexto capítulo deberás ser capaz de:

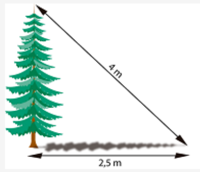
- ✓ Aplicar los teoremas de funciones diferenciables.
- ✓ Calcular límites indeterminados usando la Regla de L'Hospital.

Contenidos:

6. Propiedades De Las Funciones Diferenciables - Teoremas del cálculo diferencial - Regla de L´Hospital

En esta unidad se estudiarán tres teoremas para funciones continuas y diferenciables: el **Teorema de Rolle**, el **Teorema de Valor Medio de Lagrange** y el **Teorema de Cauchy**. Además, se abordará el límite de funciones cuando el mismo es indeterminado (del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$), con un procedimiento más sencillo que el visto en el Capítulo N°3, llamado la **Regla de L'Hospital**.

Se ha observado que a muchas situaciones prácticas las podemos explicar por medio de una función, esto significa que para estudiar un problema es necesario determinar el comportamiento de esa función. Algunas preguntas de interés son: ¿Qué valores optimizan el modelo, es decir, la función tiene un valor máximo o mínimo?, ¿La función es creciente o decreciente?, ¿A qué ritmo está creciendo o decreciendo la función? En el Capítulo N°5 abordamos diferentes herramientas que nos permitieron responder a esas preguntas, en esta unidad analizaremos otros procedimientos que nos permiten localizar extremos relativos de las funciones en estudio y cuando el cambio instantáneo es igual al cambio promedio. Estas herramientas son **teoremas**, que, si cumplen determinadas condiciones, llamadas **hipótesis**, permiten asegurar la existencia de extremos relativos o cambios instantáneos iguales a cambios promedios, las **tesis**.



Un **Teorema** es una afirmación que, para ser demostrada como verdadera, se deben utilizar argumentos teóricos.
Los teoremas se descomponen en **Hipótesis y Tesis**.
La **hipótesis** corresponde a las condiciones que exige la situación para que se pueda producir la **tesis.**
Finalmente, la **Demostración** es la secuencia de argumentos teóricos que se basan en la hipótesis y sus conocimientos previos, para llegar a determinar la Tesis.

En el siguiente link, encontrarás los videos explicativos correspondientes a la presente unidad: https://bit.ly/MIUnidadN6FCEUNRC

6.1 Teoremas de las funciones derivables

6.1.1 Teorema de Rolle

Antes de proporcionar la demostración del teorema, examinaremos las gráficas de algunas funciones representativas, las cuales son funciones derivables y toman valores iguales a los extremos del intervalo $[a, b]$

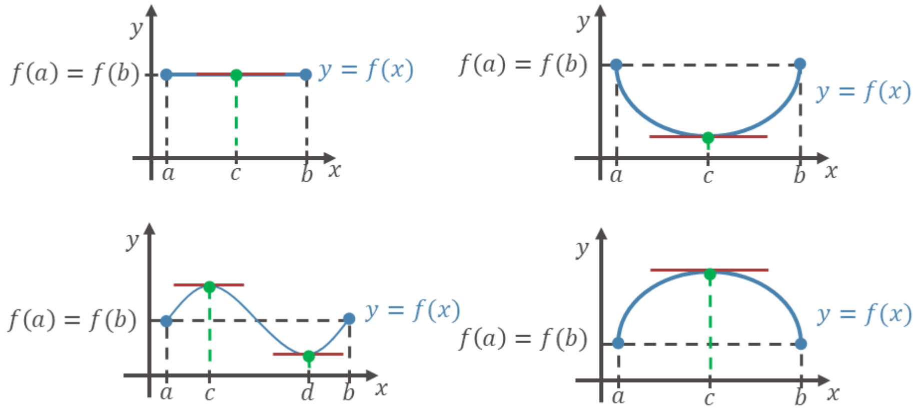


Fig. 106.: Funciones derivables que toman valores iguales a los extremos del intervalo

Si se observan las gráficas, en cada caso se ve que existe, por lo menos un punto $(c, f(c))$ de la gráfica en donde la tangente es horizontal, y por lo tanto $f'(c) = 0$.

Enunciado

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a; b]$, derivable en el intervalo abierto $(a; b)$ y si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un valor $c \in (a; b)$ para el cual se cumple que $f'(c) = 0$.

Este enunciado se descompone en:

Hipótesis	**Tesis**
f continua en $[a; b]$	$\exists\, c \in (a; b) / f'(c) = 0$
f derivable en $(a; b)$	
$f(a) = f(b)$	

Dado lo estudiado en la Capítulo N°5 y siendo f una función continua en un intervalo cerrado $[a; b]$, ¿qué consecuencia se deriva de ello?

....

....

....

Michel Rolle (1652–1719) matemático francés. Se dedicó preferentemente a la teoría de ecuaciones, campo en el que encontró diversos resultados, entre los que destaca el reconocido teorema que lleva su nombre formulado en 1691.

Hemos abordado las definiciones de continuidad en un intervalo cerrado $[a; b]$ y derivabilidad en un intervalo abierto $(a; b)$ cuando estudiamos los puntos **3.6.2 "Definición de continuidad en un intervalo"** y **4.1.4 "Derivabilidad y Continuidad en un Intervalo $(a; b)$"**.

A partir de las hipótesis del Teorema de Rolle y según lo estudiado en el Capítulo N°5, ¿es posible que en $x = c$, $f´(c)$ no exista?, ¿por qué?

……

……

………

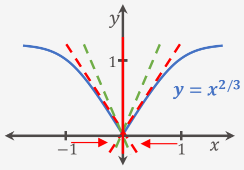
Partimos de una función que cumple con las hipótesis del teorema:

- ✓ $\boldsymbol{f}$ **continua en** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$**:** Puesto que $f(x)$ es una función **continua** en el intervalo cerrado $[a; b]$, la función alcanza un **valor máximo absoluto** y un **valor mínimo absoluto** en dicho intervalo.
- ✓ $\boldsymbol{f}$ **derivable en** $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$**:** Esta hipótesis permite asegurar que para todo valor perteneciente al intervalo $(a; b)$ es posible hallar la derivada y por lo tanto, no existen puntos cúspides o angulosos en dicho intervalo.
- ✓ $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$**:** Esta hipótesis afirma que las imágenes de los valores extremos del intervalo $[a; b]$ son iguales.

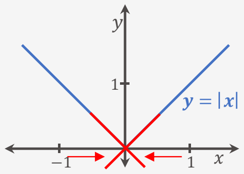
Luego, se cumple la tesis que establece que existe al menos un valor $c \in (a; b)$ para el que $f´(c) = 0$ (la derivada de la función es cero). Es por ello que, del enunciado del teorema, se desprende que geométricamente, la recta tangente a la curva en el punto $(c; f(c))$ es horizontal.

Cuando abordamos el tema **Derivabilidad y Continuidad en un punto** $\boldsymbol{x = x_0}$ (Punto 4.1.3 del Capítulo N°4) Se analizaron dos casos que pueden presentarse en los que la función es continua en el punto $\boldsymbol{x = x_0}$ pero no es derivable en dicho punto.

Punto Cúspide:



Punto Anguloso:



Demostración

A efectos de esta demostración, distinguiremos los siguientes casos:

<u>Primer caso</u>**: Tanto el valor máximo absoluto como el valor mínimo absoluto se alcanzan en los extremos del intervalo, es decir en** $\boldsymbol{x = a}$ **y en** $\boldsymbol{x = b}$**.**

La única función que verifica este caso es la función constante, por lo tanto $f(a) = f(b)$, el valor máximo absoluto y valor mínimo absoluto coinciden. Su derivada es cero en todos los puntos del intervalo abierto $(a; b)$. A continuación, en la fig. 107 se presenta la gráfica de la función constante.

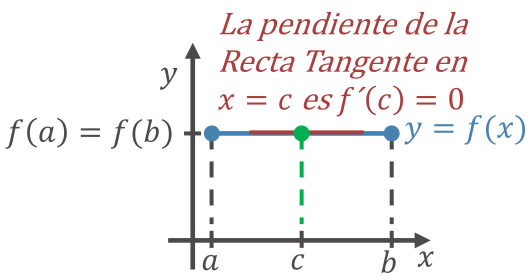


Fig. 107.: Función Constante. La función $y = f(x)$ alcanza su valor máximo y mínimo absoluto en los extremos del intervalo.

¿Por qué se puede asegurar que toda función constante cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle?

……

……

……

Recordar en el Capítulo N°5, establecimos como **condición necesaria para la existencia de extremos relativos** que todo extremo relativo ocurre en un punto crítico de primer orden.

<u>Segundo caso</u>: La función alcanza un máximo o mínimo absoluto en un valor $x = c$ distinto de los extremos del intervalo.

A continuación, analizaremos diferentes situaciones que se pueden presentar en este segundo caso.

- Si la función, f, alcanza su **máximo absoluto en un valor $x = c$** distinto de los extremos del intervalo y el **mínimo absoluto en los extremos** del intervalo, se presenta la siguiente situación:

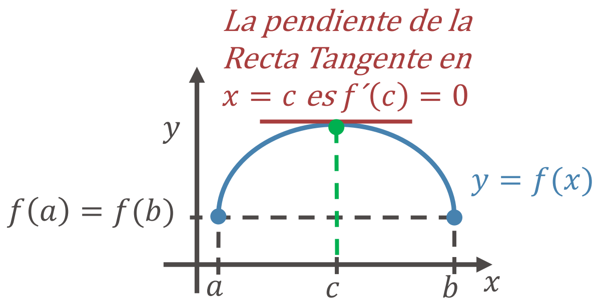


Fig. 108. La función $y = f(x)$ presenta un máximo absoluto en un valor $x = c$ distinto de los extremos del intervalo y el mínimo absoluto en los extremos del intervalo.

El hecho de que la función alcance un máximo absoluto en un valor $x = c$, perteneciente al interior del intervalo $[a; b]$, implica que ese máximo absoluto es también un máximo relativo. A la izquierda de $x = c$ la función es creciente y decreciente a su derecha. Este máximo relativo ocurre en el punto crítico de primer orden en donde $f´(c) = 0$.

En el punto $(c; f(c))$ la recta tangente es horizontal, por lo tanto, su pendiente es nula.

- Si la función, f, alcanza su **mínimo absoluto en un valor $x = c$** distinto de los extremos del intervalo y el **máximo absoluto en los extremos** del intervalo, se presenta la siguiente situación:

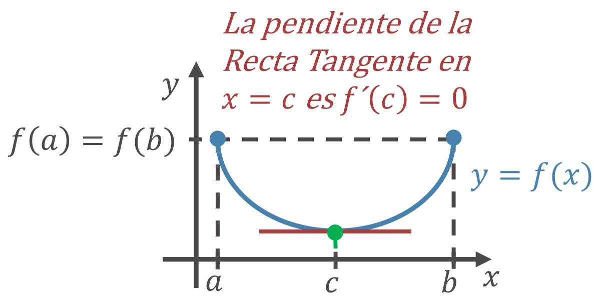


Fig. 109. La función $y = f(x)$ presenta un mínimo absoluto en un valor $x = c$ distinto de los extremos del intervalo y el máximo absoluto en los extremos del intervalo.

El hecho de que la función alcance un mínimo absoluto en un valor $x = c$, perteneciente al interior del intervalo $[a; b]$, implica que ese mínimo absoluto es también un mínimo relativo. A la izquierda de $x = c$ la función es decreciente y creciente a su derecha. Este mínimo relativo ocurre en el punto crítico de primer orden en donde $f´(c) = 0$.

En el punto $(c; f(c))$ la recta tangente es horizontal, por lo tanto, su pendiente es nula.

✓ Tanto el **máximo absoluto como el mínimo absoluto** ocurren en valores distintos a los extremos del intervalo.

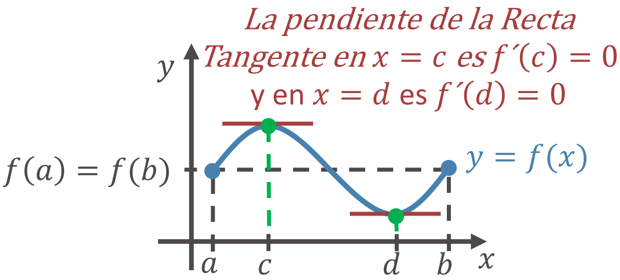


Fig. 110. La función $y = f(x)$ presenta

El hecho de que la función alcance un máximo absoluto en valor $x = c$ y un mínimo absoluto en $x = d$, pertenecientes al interior del intervalo $[a; b]$, implica que estos valores máximos y mínimos absolutos son también extremos relativos. En estos extremos relativos ocurren puntos críticos de primer orden, siendo $f´(c) = 0$ y $f´(d) = 0$.

En los puntos $(c; f(c))$ y $(d; f(d))$ la recta tangente es horizontal, por lo tanto su pendiente es nula.

Dada la función $f(x) = x^2 + 2x$, se te solicita verificar si la misma cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[-2; 0]$, en caso de ser posible, halla el valor $x = c$ correspondiente.

Resolución:

Se verifica que la función cumpla con las hipotesis del Teorema de Rolle:

1. f es continua en el intervalo $[-2; 0]$, por ser una función polinómica.
2. Derivable en $(-2; 0)$ por ser una función polinómica.
3. $f(-2) = f(0)$ pués:

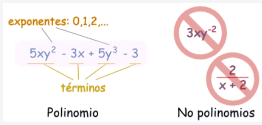
$$f(-2) = (-2)^2 + 2.(-2) = 0 \text{ y } f(0) = (0)^2 + 2.(0) = 0$$

Al verificarse las hipotesis del teorema, se puede asegurar la existencia de al menos un valor $x = c$ que pertenece al intervalo $(-2; 0)$ en donde la derivada primera de la función, f, es cero.

Se obtiene el valor $x = c$, donde se cumple la tesis del teorema:

$$f´(x) = 2.x + 2$$

$$f´(c) = 2.c + 2 = 0 \Leftrightarrow 2.c + 2 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{2}{2} \Leftrightarrow c = -1$$



Cuando abordamos el tema **Algunas funciones** $\mathbb{R}$ **de variable** $\mathbb{R}$ (Punto 1.5 del Capítulo N° 1) se definió que las **funciones polinómicas** son aquellas cuya expresión es un polinomio y su **dominio** son todos los **reales**.

El valor $c \in (a,b)/f'(c) = 0$ es $c = -1$, que pertenece al intervalo $(-2;0)$ y que verifica que $f'(-1) = 0$

Hipótesis	
1	f es continua en $[-2;0]$
2	f es derivable en $(-2;0)$
3	$f(-2) = f(0)$

Tesis
$\exists x = -1 \in (-2;0)/f'(-1) = 0$

Tabla N°29

El **Teorema de Rolle** establece que si f **satisface las condiciones** de su enunciado, debe **haber al menos** un punto entre $x = a$ y $x = b$ en el que la **derivada es cero**. Puede haber, sin embargo, **más de un punto** donde eso suceda.

Previo a continuar con el desarrollo de los otros teoremas que estudiaremos en la unidad, consideramos importante destacar que:

Por ser $f(a) = f(b)$, la recta secante que pasa por los puntos $(a;f(a))$ y $(b;f(b))$ es horizontal y su pendiente es cero $(m_{sec} = 0)$.

Una consecuencia que se deriva de esta observación es que, en el Teorema de Rolle, la recta secante pasa por los puntos $(a;f(a))$ y $(b;f(b))$ es siempre paralela a la recta tangente a la curva en el punto $(c;f(c))$.

6.1.1.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 1: Dada la función $f(x) = x^3 + x$ comprueba si cumple con las hipótesis del teorema en el intervalo $[-1;1]$ y luego en caso afirmativo halla el valor $x = c$ correspondiente.

ACTIVIDAD 2: Calcula el extremo del intervalo $x = b$ para que la función $f(x) = x^2 - 2.x + 10$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0;\ b]$. ¿En qué valor $x = c$ se cumple la tesis?

ACTIVIDAD 3: El beneficio de un fabricante en la venta de lapiceras viene dado por la función $B(x) = -400x^2 + 6800x - 12000$, donde x es el precio a que se venden las lapiceras.

Sabiendo que el precio posible de venta está comprendido entre 2 y 15 y que en dichos valores extremos el beneficio es nulo, utiliza el Teorema de Rolle para hallar el valor extremo de la función.

6.1.2 Teorema del Valor Medio de Lagrange

Consideremos una función continua $y = f(x)$ definida para $a \leq x \leq b$, y supongamos que $f'(x)$ existe para $a < x < b$. La gráfica es una curva suave que une los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (b, f(b))$. Como se observa en la fig. 111.

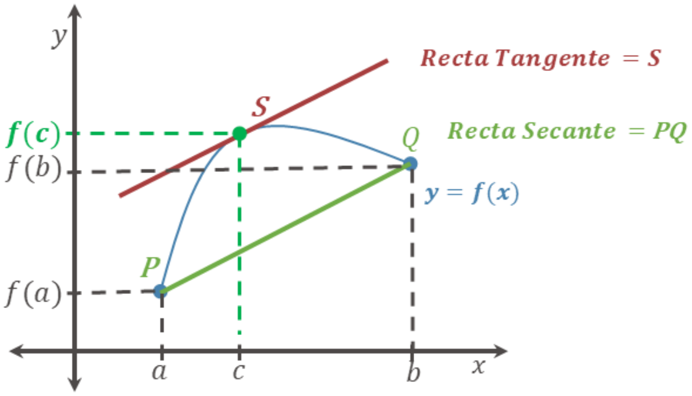


Fig. 111.: La tangente y la recta son paralelas si sus pendientes son iguales

Parece geométricamente evidente que debe haber puntos en esta gráfica, entre P y Q, en los que la tangente a la curva es paralela a la recta PQ.

Formulemos analíticamente la expresión *"hay una tangente paralela a la recta"*

La pendiente de la recta PQ es:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La pendiente de una tangente en un punto $(c, f(c))$ es $f'(c)$. La tangente y la recta secante son paralelas si sus pendientes son iguales. Así esperemos que se verifique lo siguiente.

Enunciado

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a; b]$ y derivable en $(a; b)$, entonces existe al menos un valor $c \in (a; b)$ para el cual se cumple que:

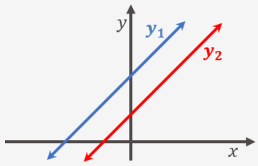
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Este enunciado se descompone en:

<u>Hipótesis</u>	<u>Tesis</u>
f continua en $[a; b]$ f derivable en $(a; b)$	$\exists\ c \in (a; b) / f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Joseph-L. Lagrange
(1736-1813)
Fue un físico, matemático y astrónomo italiano naturalizado francés. Aportó avances transcendentales en matemáticas y fue el autor de novedosos trabajos de astronomía.

Cuando abordamos el tema **Rectas paralelas y perpendiculares** (Punto 2.1.4 del Capítulo N° 2) se definió **rectas paralelas** a todas aquellas que posean la **misma pendiente**. **Geométricamente**



Las rectas paralelas tienen la misma inclinación respecto al *eje x*.

Dado lo estudiado en la Capítulo N°4 y siendo $f(x)$ una función continua en $[a; b]$, ¿qué representa esta expresión: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

....

....

....

Dado lo estudiado en el Capítulo N°4 y siendo $f(x)$ una función derivable en $(a; b)$, ¿qué representa geométricamente la expresión $f'(c)$?

....

....

....

Partimos de una función que cumple con las hipótesis del teorema:

- ✓ $\boldsymbol{f}$ **continua en** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$
- ✓ $\boldsymbol{f}$ **derivable en** $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$

La hipótesis permite asegurar que existe al menos un valor $x = c$ donde se cumple que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interpretación geométrica

A los efectos de la construcción geométrica, consideraremos una función, $y = f(x)$, que cumpla con las hipótesis que establece el Teorema de Valor Medio, es decir, continua en el intervalo cerrado $[a; b]$, derivable en $(a; b)$.

A continuación, en la fig.112, se presenta la gráfica de la función, se traza la recta L, secante a la curva que pasa por $(a; f(a))$ y $(b; f(b))$ y la recta L_1, paralela a L, tangente a la curva en $x = c$.

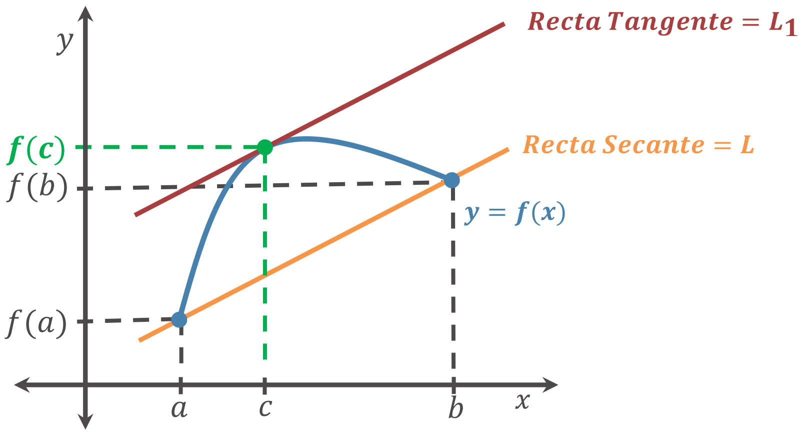


Fig. 112.: Teorema de Valor Medio

Una Recta Secante es aquella recta que corta a la curva en dos puntos de coordenadas conocidas. Dado dos puntos de coordenadas conocidas $(x; f(x))$ y $(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$, entonces la pendiente de recta secante viene dada por:

$$m_{sec} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La pendiente de la recta secante, L, es: $m_{sec} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y la pendiente de la recta tangente, L_1, en $x = c$, es: $m_{tg} = f'(c)$

Como las dos rectas son paralelas, tienen la misma pendiente, por lo que se afirma:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En general, una interpretación de Teorema del Valor Medio es que hay al menos un valor $x = c$ en el cual la variación de cambio instantánea es igual a la variación de cambio promedio en el intervalo.

Demostración:

Vamos a estudiar la función que se obtiene al restar de la ordenada de la curva $f(x)$ la ordenada de la recta secante y que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Formamos una función auxiliar, que llamaremos $h(x)$, diferencia entre la ordenada de la curva $f(x)$ y la de la recta y que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

$$h(x) = f(x) - y$$

y se obtiene a través de la fórmula punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Luego:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

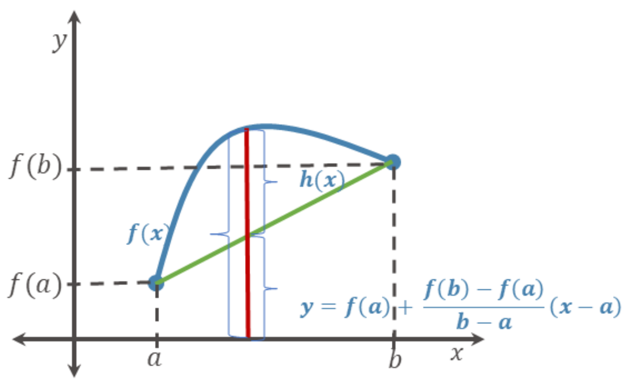


Fig. 113.: Función $h(x)$, diferencia entre la ordenada de la curva $f(x)$ y la de la recta

Se aplica el Teorema de Rolle a la nueva función h definida por:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La función $h(x)$ cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$,

1. La función h es continua en $[a, b]$, porque es la diferencia entre f y un polinomio de primer grado, que son dos funciones continuas.
2. La función h es derivable en (a, b), porque tanto f como el polinomio de primer grado son diferenciables. En efecto, se

puede calcular h' directamente de la ecuación:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Nótese que $f(a)$ y $[f(b) - f(a)/(b - a)]$ son constantes)

3. Se verifica que $h(a) = h(b)$.

$$h(b) = h(a)\begin{cases} h(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0 \\ h(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, cumple la tesis: $\exists\, c \in (a, b)/h'(c) = 0$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

De donde se deduce que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La función h utilizada en la demostración del Teorema de Valor Medio se puede interpretar como sigue.

La ecuación de la recta AB se puede escribir como:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

O como:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Así que $|h(x)|$ se puede interpretar como la distancia vertical entre la recta AB y la curva $y = f(x)$.

El **teorema de Valor Medio de Lagrange** es una generalización del ***teorema de Rolle***. En el Teorema de Rolle, la condición es que $f(a) = f(b)$, por lo que la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene la misma pendiente que la recta tangente en $x = c$, al ser ambas paralelas y sus pendientes valen "0".

Sin imponer la condición de que $f(a) = f(b)$, también se verifica que la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene la misma pendiente que la recta tangente en $x = c$, comprendido dentro del intervalo.

El Teorema de **Valor Medio** y el de **Rolle** comparten las hipótesis de continuidad en un intervalo cerrado $[a; b]$ y derivabilidad en un intervalo abierto $(a; b)$, por tal motivo las consideraciones ya realizadas son aplicables.

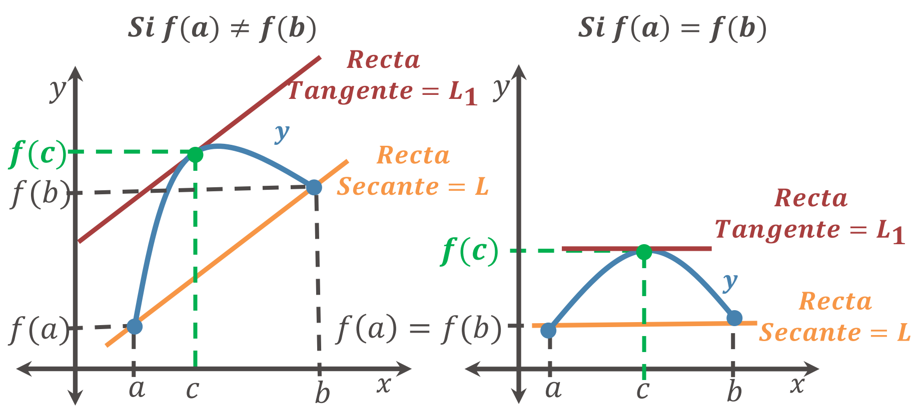


Fig. 114.: Teorema de Valor Medio y Teorema de Rolle

Una función beneficio que responde a la ecuación $B(x) = -x^2 + 60x$ definida en el intervalo $[0; 60]$. Donde x representa cantidad de muebles de oficina. ¿Para qué valor de x el cambio promedio es igual al cambio instantáneo en el intervalo $[20; 30]$?

Resolución:

$B(x)$ es una función continua en $[20; 30]$ y derivable en $(20; 30)$, por lo tanto, existe un valor c donde:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\frac{B(30) - B(20)}{30 - 20} = B'(c) \Leftrightarrow \frac{900 - 800}{30 - 20} = -2c + 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{10} = -2c + 60 \Leftrightarrow 10 = -2c + 60 \Leftrightarrow c = \frac{50}{2} \Leftrightarrow c = 25$$

El valor de x donde el cambio promedio es igual al cambio instantáneo en el intervalo $[20; 30]$ es $c = 25$

Hipótesis	
1	f es continua en $[20; 30]$
2	f es derivable en $(20; 30)$

Tesis
$\exists\, c \in (20; 30) / f'(25) = \frac{f(30) - f(20)}{30 - 20}$

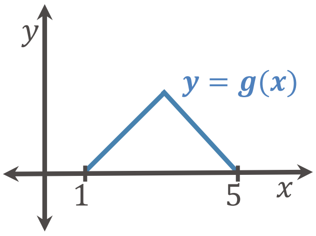
Tabla N°30

Del estudio del Teorema de Valor Medio, y siendo $y = f(x)$ una función que satisface sus hipótesis puede afirmarse que:

El **cambio promedio** que experimenta la función en el intervalo $[a; b]$ **es igual** al **cambio instantáneo** para al menos un $x = c$ que pertenezca al intervalo (a, b).

6.1.2.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 4: Dada la siguiente función:



Se te solicita que justifiques si se cumplen con las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[1; 5]$, en caso de ser posible, encuentra el/los valor/es que satisfacen el teorema.

ACTIVIDAD 5: Verifica que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio y en caso de que sea posible calcule el valor de $x = c$ que satisface el teorema del valor medio para la siguiente función $f(x) = x^2 + 2.x - 1$ en el intervalo $[0; 1]$.

ACTIVIDAD 6: Dada una función beneficio que responde a la ecuación $B(x) = -x^2 + 60x$ definida en el intervalo $[0; 60]$. Donde x representa cantidad de muebles de oficina. ¿Para qué valor de x el cambio promedio es igual al cambio instantáneo en el intervalo $[0; 60]$?

ACTIVIDAD 7: Dada la función de beneficio trabajada en la actividad "Planta Embotelladora de Agua":

$$B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x$$

Se te solicita que compruebes si la función cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle y del Teorema de Valor Medio en el intervalo de análisis $[0; 18]$ y en caso de ser posible, halle el/los valor/es $x = c$ correspondiente.

6.1.3 Teorema de Cauchy

Si en vez de trabajar con una función, trabajamos con dos funciones, f y g, que cumplan con las hipótesis del Teorema de Valor Medio en $[a, b]$.

Se puede concluir en lo siguiente:

Si f cumple el teorema de Valor Medio en $[a, b]$ entonces:

$\Rightarrow \exists\, c_1 \in (a, b) \,/\, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1)$

Si g cumple el teorema de Valor Medio en $[a, b]$ entonces:

$\Rightarrow \exists\, c_2 \in (a, b) \,/\, \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c_2)$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

Augustin L. Cauchy (1789 - 1857) Matemático francés. Posee acerca de 800 publicaciones y siete trabajos; su investigación cubre el conjunto de áreas matemáticas de la época. Fue pionero en análisis donde se le debe la introducción de las funciones holomorfas, los criterios de convergencia de series y las series de potencias. Sus trabajos sobre permutaciones fueron precursores de la teoría de grupos, contribuyendo de manera medular a su desarrollo.

En el Teorema de Cauchy se llega a un resultado similar al anterior, pero para un único c.

Enunciado

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en el intervalo cerrado $[a;b]$ y derivables en el intervalo abierto $(a;b)$, entonces existe al menos un valor $c \in (a;b)$ para el cual se cumple que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(c) \neq 0$

Este enunciado se descompone en:

Hipótesis	**Tesis**
f y g continuas en $[a;b]$ f y g derivables en $(a;b)$	$\exists\, c \in (a;b) / \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ Con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(c) \neq 0$

En análisis matemático, y más concretamente en cálculo diferencial, el **Teorema de Cauchy** es una generalización del Teorema del Valor Medio (de Lagrange). A partir de este puede demostrarse la regla de **L'Hôspital**, fuerte ayuda para el cálculo de límites con indeterminaciones $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Demostración

Para demostrar el teorema definimos una función auxiliar $s(x)$ que es la suma de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, con una particularidad. Para formar $s(x)$ utilizo las operaciones de suma y producto por escalar, con lo cual aseguro que la función auxiliar permanezca siendo continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

Entonces:

$$s(x) = f(x) + k \cdot g(x)$$

Trabajando con la función $s(x)$ y para demostrar el Teorema de Cauchy se aplicará uno de los teoremas estudiados anteriormente, el Teorema de Rolle.

La función $s(x)$ cumple con las primeras dos hipótesis, para que cumpla con la tercera, debe ser:

$$s(b) = s(a)$$

Entonces:

$$s(b) = f(b) + k \cdot g(b) \text{ y } s(a) = f(a) + k \cdot g(a)$$

Se igualan los segundos miembros.

$$f(b) + k \cdot g(b) = f(a) + k \cdot g(a)$$

Para que esta igualdad se cumpla, k debería ser:

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)} \quad (1)$$

Entonces $\exists c \in (a,b) / s'(c) = 0$

Y se cumple el Teorema de Rolle
Quien es $s'(c) = 0$

$$s'(c) = f'(c) + k \cdot g'(c) = 0$$

Si se despeja k:

$$k = -\frac{f'(c)}{g'(c)} \; (2)$$

Si igualamos (1) y (2)

$$-\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}$$

En definitiva, es lo que se quería demostrar.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Quedando así demostrado el Teorema de Cauchy.

6.1.3.1 Análisis Geométrico del Teorema de Cauchy para dos Funciones Continuas $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ y derivables $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$

A continuación, se explica el procedimiento para identificar el valor $x = c$ que verifica el Teorema de Cauchy cuando las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ coincides en los valores extremos del intervalo $[a; b]$, es decir $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$.

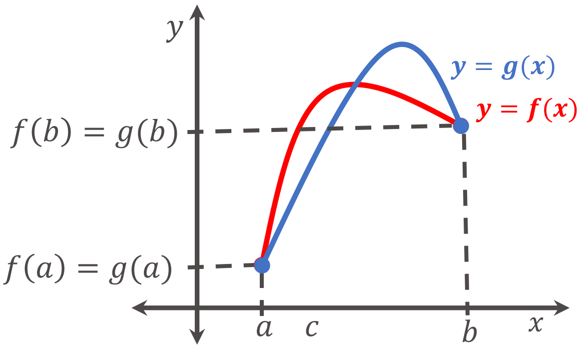


Fig. 115.: Representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Observa que, ambas funciones cumplen con las hipótesis del teorema, son continuas en el intervalo $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ y derivables $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$, por lo que puede afirmarse que al menos existen un valor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ para el que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

En este caso, dadas las condiciones que se establecen en los extremos del intervalo ($f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$), la tesis se reduce a:

$$1 = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Por lo que puede establecerse que:

$$f'(c) = g'(c)$$

Así, si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, el Teorema de Cauchy asegura que la pendiente de la recta tangente a las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en $x = c$ son iguales, por lo que ambas rectas son paralelas.

Queda ahora identificar los puntos $(c; f(c))$ y $(c; g(c))$ para los que $f'(c) = g'(c)$. Así, dado el comportamiento gráfico de ambas funciones, el valor $x = c$ queda ubicado en la siguiente posición (Ver Fig. 115):

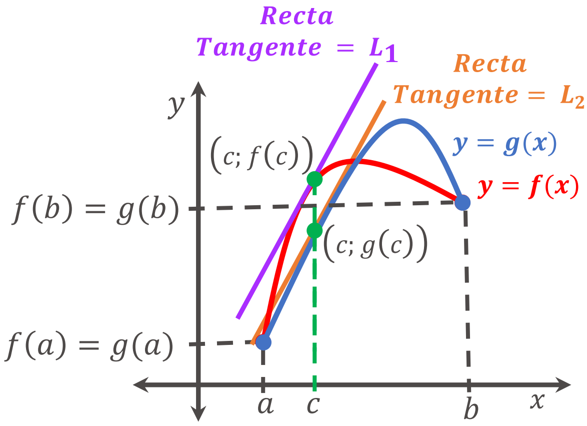


Fig. 115.: Representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Las rectas tangentes L_1 y L_2 son paralelas por lo que verifican la condición $f'(c) = g'(c)$.

Para profundizar en la identificación del/los valor/es $x = c$ que verifican el Teorema de Cauchy, te proponemos que representes gráficamente en tu hoja dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$ bajo la condición de que $f(b) - f(a) = 2.\left(g(b) - g(a)\right)$. Luego, indica si pudiste hallar un único valor $x = c$ que cumpla con el teorema o si, según tu gráfica, encontraste más de uno.

6.1.3.2 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 8: Dadas las funciones de ingreso, $I(x) = 6800x$ y costo, $C(x) = 400x^2 + 12000$.

a) Determina la función beneficio $B(x)$.

b) Con la función $B(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo [2; 15]. Luego, responde: ¿Existe algún valor $x = c$ en donde se cumple la tesis?

c) Con la función $B(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Valor Medio en el intervalo [4; 12]. Luego, responde: ¿Existe algún valor $x = c$ en donde se cumple la tesis?

d) Con las funciones $I(x)$ y $C(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Cauchy en el intervalo [4; 12]. Luego, responde: ¿Existe algún valor $x = c$ en donde se cumple la tesis?

En el siguiente link encontrarás un video con la solución de esta actividad: https://youtu.be/iv77yIBgLq8

6.2 Regla de L'Hospital

Nos abocaremos al estudio de la regla de L´Hospital, que se aplica a indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Para las otras indeterminaciones, $\infty - \infty$; $\infty . 0$; 1^{∞}; ∞^{0}; 0^{0}, se deberán transformar las funciones en cocientes para luego, poder aplicar la regla.

La regla de L' Hospital establece que, bajo ciertas condiciones, el límite del cociente de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ coincide con el límite de sus derivadas $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

En general, si tiene un límite de la forma:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Donde tanto $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to c$, en tal caso este límite puede existir o no y se conoce como forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. En el Capítulo N° 3 se resolvieron algunos límites de este tipo. Para las funciones racionales, mediante procedimientos algebraicos, se cancelaron los factores comunes, como en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Pero este método no siempre funciona para algunos límites, como es el caso de:

$$\lim_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

De modo que, en esta unidad, se presenta un método sistemático, conocido como **regla de L'Hospital**, para la evaluación de formas indeterminadas.

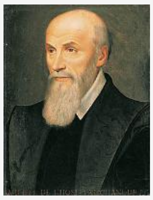
Enunciado

Sean f y g dos funciones continuas en $[a; b]$ y derivables en $(a; b)$ que contiene a un valor $x = c$.

Si $\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = 0$, $\lim_{x \to c} g(x) = g(c) = 0$ y existe el $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y es:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

La regla de L´Hospital, tal como lo expuesto en su enunciado, solo sería válida para límites en los que la variable tiende a una constante $(x \to c)$ de indeterminaciones del tipo: $\frac{0}{0}$. Pero su campo de aplicación se puede ampliar notablemente, pues también es válida para indeterminaciones del tipo: $\frac{\infty}{\infty}$, y más aún, la regla es aplicable cuando x tiende a $+\infty$ ó $-\infty$.



La regla de L'Hospital debe su nombre al matemático francés Guillaume L'Hospital (1661-1704), autor del primer libro sobre cálculo diferencial (en 1969), en el que aparece citada la regla.
Se ha descubierto recientemente que tanto la regla como su demostración estaban contenidas en una carta de John Bernoulli a L'Hospital.

La regla de L'Hospital utiliza **el cociente de las derivadas** y no la derivada del cociente

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$$

Encuentre $\lim\limits_{x \to 1} \frac{ln\,(x)}{x-1}$

Resolución:

Puesto que: $\lim\limits_{x \to 1} ln(x) = ln\,(1) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$

Puede aplicar la regla de L'Hospital

$$\lim_{x \to 1} \frac{ln\,(x)}{x-1} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

Resolución:

Se tiene que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \infty$

Si se aplica la regla de L'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Si Se obtiene reiteradamente una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ la regla de L´Hospital se aplica tantas veces como sea necesario hasta resolver la indeterminación.

Las expresiones del tipo: $\infty - \infty, \infty.0, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0$, trabajándolas algebraicamente se las puede expresar en forma de cocientes para poder aplicar esta regla.

Para trabajar con las formas indeterminadas: $\infty - \infty;\ \infty.\mathbf{0};\ \mathbf{1}^{\infty};\ \infty^{\mathbf{0}};\ \mathbf{0}^{\mathbf{0}}$ Puedes consultar en el libro *Análisis Matemático I*. Autores: G. Recabarren, C. Marchesini, S. Panella, S. Butigué, S. Cabrera N. Scattolini, S. Curti, M. Lardone, S. Mussolini y M.

6.2.1 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 9: Calcula los siguientes límites aplicando la regla de L´Hospital.

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 3x^2 + 5x + 8}{2x^2 - 7x - 1}$

ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$

iii) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3 - x}{\sqrt{x + 22} - 5}$

iv) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{e^{(6x+2)}}$

v) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x - 1}$

vi) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{ln\,(4.e^x - 4)}{ln\,(x)}$

vii) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x^3}$

viii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x}$

6.3. Abordaje de los distintos tipos de indeterminaciones y su relación con la Regla de L´Hospital

En el presente apartado nos abocaremos al estudio de los distintos tipos de indeterminaciones que pueden presentarse y su relación con la regla de L'Hospital. En particular, consideraremos las formas indeterminadas $\infty - \infty$; $\infty . 0$; 1^{∞}; ∞^{0}; 0^{0}, las cuales, para poder analizar si admiten o no un límite, deben transformarse en cocientes que permitan aplicar dicha regla. A continuación, analizaremos los diferentes casos:

CASO $\infty - \infty$

En la indeterminación $\infty - \infty$ el procedimiento que se debe aplicar consiste en sacar mínimo común denominador de los denominadores dados para luego aplicar la regla de L´Hospital.

Partimos de la siguiente situación:

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$, así $\lim\limits_{x \to c}[f(x) - g(x)] = \infty - \infty$

$$\lim_{x \to c}[f(x) - g(x)] \underbrace{=}_{\substack{Multiplicamos \\ y\ dividimos\ por \\ f(x).g(x)}} \lim_{x \to c}\big(f(x).g(x)\big)\frac{f(x) - g(x)}{\big(f(x).g(x)\big)}.$$

$$\underbrace{=}_{\substack{Transformamos\ el \\ producto\ en \\ cociente}} \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{f(x) - g(x)}{\big(f(x).g(x)\big)}}{\dfrac{1}{\big(f(x).g(x)\big)}} = \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{f(x)}{\big(f(x).g(x)\big)} - \dfrac{g(x)}{\big(f(x).g(x)\big)}}{\dfrac{1}{\big(f(x).g(x)\big)}} =$$

$$\boxed{\lim_{x \to c}[f(x) - g(x)] \underbrace{=}_{Simplificamos} \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x).g(x)}} = \frac{0}{0}}$$

Observa que la indeterminación del tipo $\infty - \infty$ la hemos transformado en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, en la que ya es posible aplicar la regla de L´Hospital.

CASO $0 . \infty$ ó $\infty . 0$

En la indeterminación $0 . \infty$ ó $\infty . 0$ para este caso es necesario realizar una transformación algebraica con el producto de funciones:

$$\lim_{x \to c}[f(x).g(x)] = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ó } \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

De este modo llegamos a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ que ya sabemos cómo se resuelven aplicando la regla.

CASO 0^{0} ∞^{0} 1^{∞}

Si:

- ✓ $\lim\limits_{x \to c}[f(x)]^{g(x)} = 1^{\infty}$ en donde el $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$

- ✓ $\lim_{x \to c} [f(x)]^{g(x)} = \infty^0$ en donde el $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 0$
- ✓ $\lim_{x \to c} [f(x)]^{g(x)} = 0^0$ en donde el $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 0$

Para resolver cualquiera de estas estas indeterminaciones aplicamos logaritmos naturales sobre la función y tomamos límite para cuando x tiene a c:

$$ln\left[\left(f(x)\right)^{g(x)}\right] = g(x).\, ln[f(x)]$$

Tomamos limite a ambos miembros de la igualdad:

$$\lim_{x \to c} ln\left[\left(f(x)\right)^{g(x)}\right] = \lim_{x \to c}[g(x).\, ln(f(x))]$$

Como el límite del logaritmo es igual al logaritmo del límite:

$$ln\left[\lim_{x \to c}\left(f(x)\right)^{g(x)}\right] = \lim_{x \to c}[g(x).\, ln(f(x))]$$

El segundo miembro puede calcularse fácilmente pues nos ha quedado planteado una indeterminación $\infty.0$ ó $0.\infty$ que ya sabemos resolver:

$$ln\left[\lim_{x \to c}\left(f(x)\right)^{g(x)}\right] = \lim_{x \to c}[g(x).\, ln(f(x))] = \lim_{x \to c} \frac{ln\, f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ó } \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{\frac{1}{ln\, f(x)}} = L$$

Luego aplicamos la regla de L´Hospital y obtenemos que:

$$ln\left[\lim_{x \to c}\left(f(x)\right)^{g(x)}\right] = L$$

Como el logaritmo natural es el logaritmo en base e, aplicamos definición de logaritmo y nos queda:

$$e^{ln\left[\lim_{x \to c}\left(f(x)\right)^{g(x)}\right]} = e^L$$

$$\lim_{x \to c}\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^L$$

6.3.1Guía de Actividades Prácticas Adicionales

ACTIVIDAD 10: Calcula los siguientes límites identificando el tipo de indeterminación que corresponde y luego, en caso de corresponder, aplica la regla de L´Hospital.

i) $\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{6}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3}\right)$

ii) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2x}\right)$

iii) $\lim_{x \to 0^+} (-x.\, ln\, x)$

iv) $\lim_{x \to 0^+} 3x.\, e^{\frac{2}{x}}$

v) $\lim_{x \to 0^+} (x)^x$

vi) $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^{e^x}$

vii) $\lim_{x \to 0^+} (5x)^{x^2}$

RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES PROBLEMÁTICAS

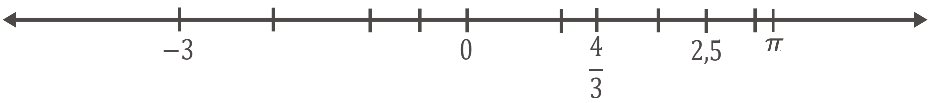
A continuación, ponemos a tu disposición las soluciones de las actividades propuestas en este módulo. Pretendemos que las mismas te sirvan para comprobar si tu razonamiento y las técnicas que empleaste en su resolución, te llevaron a obtener las respuestas correctas. Por eso:

¡Inténtalo solo!

Actividad 1:

$\sqrt{2} \in I$	$-\frac{5}{3} \in Q$
$-2 \in Q$	$132 \in Q$
$1{,}434343\ldots \in Q$	$1{,}8\hat{9} \in Q$
$0{,}123456\ldots \in I$	$-2.565758\ldots \in I$
$1{,}1415 \in Q$	$\sqrt[3]{7} \in I$
$\frac{3}{5} \in Q$	$\sqrt{81} \in Q$

Actividad 2:



Actividad 3:

a) $\frac{29}{3}$ b) $\frac{61}{4}$ c) 12

Actividad 4:

a) $\frac{11}{12}$ b) 4

Actividad 5:

a) $\frac{8}{45}$ j) $\frac{196}{45}$

b) $-\frac{13}{24}$

c) $\frac{10}{7}$

d) 4

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$

f)$(-2)^{-4}$

g)$\frac{1}{2^5}$

h) 2

i) 3

k) $\frac{15}{8}$

l) $-\frac{1}{3}$

m) $\frac{7}{9}$

n) $-\frac{1127}{48}$

o) 2

p) $-4,\widehat{44}$

q) $\frac{1}{3^3}$

r) $\frac{32}{21}$

Actividad 6:

a)$2x$

b)$2x^2$

c)$4x$

d)$4x^2$

e)x^2

f)x^4

g)$4x^2$

h)$4x^4$

i)$-16x^2 - 32x + 20$

j)$-2x^2 + 8x + 2$

Actividad 7:

$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{M+N}$	$\boldsymbol{M-N}$	$\boldsymbol{M \cdot N}$
$\boldsymbol{2x^3}$	$\boldsymbol{-\frac{5}{2}x^3}$	$-\frac{1}{2}x^3$	$\frac{9}{2}x^3$	$-5x^6$
$\boldsymbol{5a^5}$	$\boldsymbol{5a^2}$	$5a^2(a^3+1)$	$5a^2(a^3-1)$	$25a^7$

Actividad 8:

$P(x).Q(x) = 6x^7 + 12x^6 - 2x^5 - 17x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x$

Actividad 9:

a)$x^2 - 4x + 4$

b)$4x^2 + 4x + 1$

Actividad 10:

a)$4x(x^4 + 1)$

b)$(4 + x)(6x^2 - 4)$

Actividad 11:

a)$(x-1)^2$ b)$(2x+4)^2$

Actividad 12:

a) $(a-b)^2=(a-b).(a+b)$	F
b) $(a-b)^2=(a-b).(a-b)$	V
c) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	V
d) $(a-b)^2=a^2-b^2$	F
e) $a^2-b^2=(a-b).(a-b)$	F
f) $a^2-b^2=(a+b).(a-b)$	V
g) $(-x+1)^2=x^2-2x+1$	V
h) $x^2+2x+1=(x+1)^2$	V
i) $4x^2+16x+16=(2x+4)^2$	V
j) $-x^2+b^2=(-x+b).(x+b)$	V

Actividad 13:

a) $4x(x^4-1)$

b) $y(3+4y)^2$

c)$(4+x)(6x^2-4)$

d) $x(4x+3)^2$

e) $9x^2(x^2-1).(x^2+1)$

Actividad 14:

a)$9-12x+4x^2$

b)$(2x-6)(2x+6)$

c)$2(x+2)^2$

d)$(4x^2-4x).(4x^2+4x)$

e)$2(x-2)(x-4)^2$

f)$4x^2+12xy+9y^2$

Actividad 15:

a) $(x+4)$

b) $(x+4).(x-4)$

c) $\frac{4}{9x}$

d) $\frac{1}{(x+2)}$

e) 2

f) $\frac{-8x}{(x^2-4)}$

g) $\frac{(x-2)}{(x-7)}$

h) $\frac{1}{2}$

i) $\frac{(y-3)^2}{(y-1)}$

j) x

k) $\frac{4-x^2}{x^2} = -(1-\frac{4}{x^2})$

l) $\frac{2}{(x+1)(x+4)}$

Actividad 16:

a) $x = 3$

b) $x = -27$

c) $x = 1$

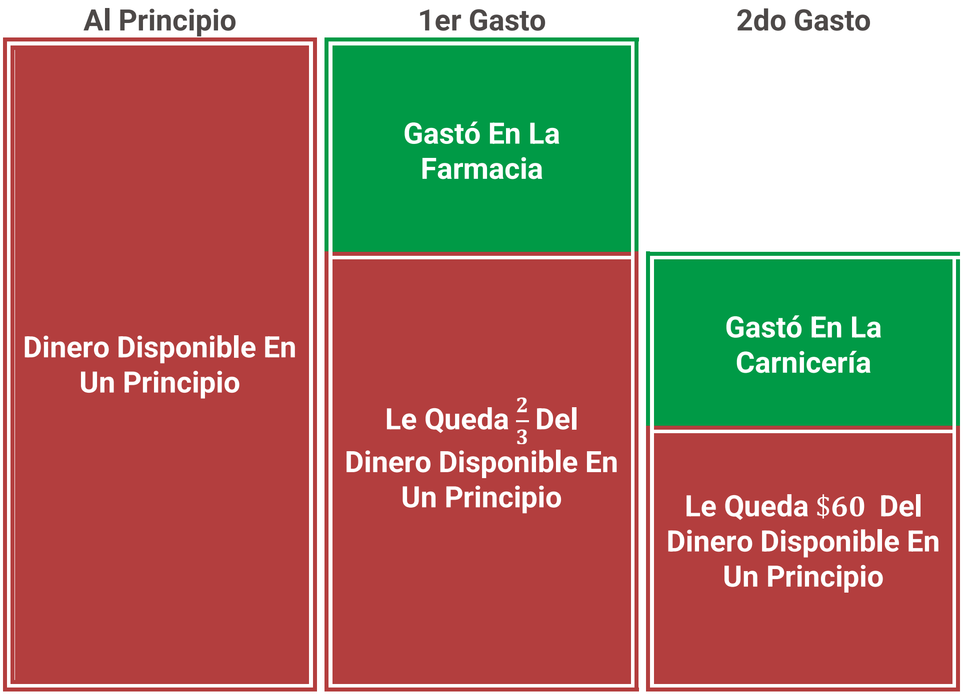
d) $x = -1$

Actividad 17:

a) En el penúltimo paso el -3 del primer miembro debería haber pasado dividiendo a la expresión del segundo miembro.

b) En el primer paso se detectan dos errores, en el primer miembro no se tiene en cuenta que un 2 está restando a toda la expresión. En el segundo miembro, se debería haber distribuido el 2 solo en el binomio del primer término y no en ambos términos.

Actividad 18:



El dinero que tenía al principio era 150 unidades monetarias.

Actividad 19:

a) $x_1 = -2,\ x_2 = 6$

b) $x_1 = -5,\ x_2 = 2$

c) $x_1 = -5,\ x_2 = \frac{1}{2}$

d) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{9}{4}$

e) $x_1 = 1 + \sqrt{3},\ x_2 = 1 - \sqrt{3}$

f) $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$

Actividad 20:

Para que no haya ingreso el aumento deberá ser de \$50.

Actividad 21:

El tiempo transcurrido es 5 años.

Actividad 22:

a) $x = -3,\ x = -1$

b) $x = -5,\ x = -1$

c) $x = -2$

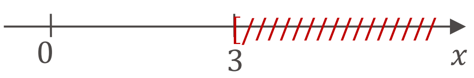
d) $x = -3,\ x = 3$

Actividad 23:

a) $x < 3$

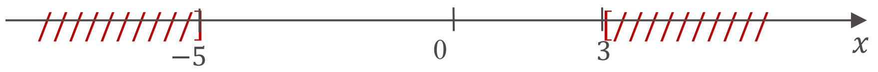
b) $x > -\frac{1}{3}$

c) $x \geq 3$



d) $x > -1 \wedge x < 5$

e) $x \leq -5 \ \vee \ x \geq 3$



f) $x \leq -4 \ \wedge \ x \geq 0$

Actividad 24:

a) $Solución\ x = 2\ ,\ y = 1.$

$$Sistema\ compatible\ determinado.$$

b) $Solución\ \ y = x - 3.$

$$Sistema\ \ compatible\ \ indeterminado.$$

c) $No\ \ tiene\ \ solución.$

$$Sistema\ \ incompatible.$$

d) $Solución\ \ y = -\frac{1}{2}x + 2.$

$$Sistema\ \ compatible\ \ indeterminado.$$

e) $Solución\ \ x = 11,\ \ y = -14.$

$$Sistema\ \ compatible\ \ determinado.$$

f) $Solución\ \ x = 0,\ \ y = 2.$

$$Sistema\ \ compatible\ \ determinado.$$

BIBLIOGRAFÍA

Allendorerfer, Oakley. (1971). *Fundamentos de Matemáticas Universitarias* (Segunda ed.). Mexico: Mc Graw Hill.

Budnick, F. S. (1990). *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales* (Tercera ed.). Mexico: Mc Graw Hill.

Celina, R. (1980). *Manual de Análisis Matemático*. Buenos Aires: Ediciones Macchi.

Checa, J. C. (1995). *Análisi Matemático para Economía y Administración: Ejercicios y aplicaciones*. Córdoba: Eudecor.

Dowling, E. T. (1992). *Càlculo para Administraciòn Economìa y Ciencias Sociales*. Bogotà: Mc Graw Hill.

Edwards, Penney. (1994). *Cálculo con Geometría Analítica* (Cuarta ed.). Mexico: Prentice Hall.

E. F Haeussler y R. S. Paul, (2003). Matemáticas para la Administración y la Economía (10.ed.). México: Pearson Educación. Se obtiene de: https://bit.ly/Haeussler2003

Ewin J. Purcell, Dale Varberg. (1993). *Cálculo con Geometría Analítica* (Sexta ed.). Mexico: Prentice Hall Hispanoamericana.

G. Recabarren, C. Marchesini, S. Panella, S. Butigué, S. Cabrera, N. Scattolini, S. Curti, M. Lardone, S. Mussolini, M. I. Herrera. (2014). *Análisis Matemático I*. Río Cuarto: UniRio. Obtenido de https://www.unrc.edu.ar/unrc/comunicacion/editorial/libro.php

L. D Hoffmann (1989). *Càlculo Aplicado para Administraciòn, Economìa, Contaduria y Ciencias Sociales*. Mexico: Mc Graw Hill.

L. Bers, F. Karal. (1978). *Càlculo* (Segunda ed.). Mexico: Nueva Editorial Interamericana S.A.

Larson, Hostetler, Edwards. (1999). *Cálculo* (Sexta ed., Vol. 1). Mexico DF: Mc Graw Hill.

M. de Guzman, Jose Coolera. (1989). *Matemática I*. Madrid: Anaya.

Rey Pastor, Picalleja, C. A. Trejo. (1961). *Ananlisis Matemático* (Sexta ed., Vol. 1). Buenos Aires: Kapelusz.

Stewart, J. (1991). *Càlculo*. Mexico: Grupo Editorial Iberoamerica.

Stewart, J. (2009). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. (Sexta ed.). Mexico DF: Cengage Learning Editores S.A.

Thomas, J. G. (1979). *Càlculo Infinitesimal y Geometìa Analìtica*. Madrid: Aguilar.

Weber, J. E. (1993). *Matemática para Administración y Economía* (Cuarta ed.). Mexico: Harla.