Facultad de
Ciencias Económicas

MATEMÁTICA
EN CONTEXTOS ECONÓMICOS

Universidad Nacional
de Río Cuarto

S. Butigué - M. Mussolini - J. Gallardo - M. Cassano - L. Bissio - L. Gil

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a la Dra. María José Bianco, Profesora Titular Regular de la UBA, que con verdadero interés leyó nuestros borradores y formuló enriquecedoras sugerencias que mejoraron el texto en forma significativa.

Al Comunicador Social, Guillermo Sbrollini, quien interpretó la matemática en contexto económico y con creatividad y diseño elaboró el contenido de la tapa del texto a través del lenguaje gráfico.

Al Dr. Eneldo Ferniot, integrante de la Sociedad de Escritores Riocuartenses, que con su apoyo y compromiso realizó la revisión de la redacción del texto académico.

PRÓLOGO

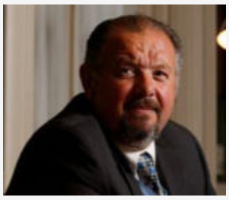
En esta obra se puede comprobar un trabajo minucioso de los autores que dotan a los estudiantes de Ciencias Económicas de un texto completo y riguroso de los conceptos y herramientas que un curso de Cálculo requiere.

La propuesta consistente en que los contenidos fundamentales aquí desarrollados estén vinculados con las diversas dimensiones de la realidad económica, política, social y cultural, en una variedad de contextos y de formas diferentes son los pilares para la reflexión, comprensión y apropiación por parte de los estudiantes de los conceptos más significativos.

El tratamiento para cada tema se organiza en dos etapas, la primera aborda las cuestiones teóricas a partir de ejemplos cotidianos y una segunda que implica el trabajo sobre actividades secuenciadas que enfrentan y plantean a los estudiantes la búsqueda de esa matemática implícita en cada situación. Así, en cada propuesta aparecen preguntas, disparadores, reflexiones y conclusiones que resultan motivadores y esenciales para la construcción del conocimiento matemático.

La organización de los temas favorece el estudio, ya que los mismos están concatenados adecuadamente. La aparición de referencias históricas resulta muy interesante y dan vida a una ciencia que a menudo es visualizada como un corpus muy abstracto y ajeno a lo cotidiano. La utilización de íconos a lo largo de la lectura facilita y favorece el recorrido por la obra. Los gráficos, cuadros, ilustraciones también ayudan a comprender más acabadamente los conceptos trabajados. Asimismo, la inclusión de vínculos con sitios web es otro recurso muy bien utilizado.

Los contenidos presentados hilvanan tres ideas fundamentales: función, límite-continuidad y derivada. Y es en torno de estos conceptos, que se despliega una batería de otros conceptos y herramientas que



Gustavo Fabián Zorzoli es Profesor de Matemática, Astronomía y Computación, Especialista en Estadística Aplicada a la investigación en Ciencias Sociales de la FCE de la UNC. Se desempeña como docente desde el año 1987 y como Rector (2010 – 2018) del Colegio Nacional de Bs As de la UBA. Profesor Titular del área Matemática de la FCE de la UBA y Profesor Asociado en Matemática I y II de la FCE de la UNLZ. Participa de proyectos de investigación, ha presentado ponencias y una vasta cantidad de publicaciones de carácter científica en congresos y revistas internacionales.
Desde 2012 Director del UBATIC institucional del Colegio Nacional de Bs As. Ha publicado 22 libros, referidos a la enseñanza y producción de materiales en Matemática para la educación a distancia.

permiten entender, describir y predecir los fenómenos económicos desde una mirada más rigurosa.

Sus autores: Silvia Inés Butigué, María Susana Mussolini, Juan Manuel Gallardo, María Virginia Cassano, Lucrecia Paola Bissio y Lucas Gil son todos docentes de la cátedra de Análisis Matemático, de reconocida trayectoria. Esta particularidad fortalece aún más esta obra, pues en él están volcadas las experiencias que el ejercicio de la docencia universitaria suministra a los profesionales que tienen bajo su responsabilidad la enseñanza.

En resumen, el texto aquí desarrollado es una herramienta esencial para el estudio, comprensión y aprendizaje en un curso de Análisis Matemático para estudiantes de Ciencias Económicas.

Gustavo Fabián Zorzoli

PALABRAS PRELIMINARES

El material que se presenta está dirigido no solo al uso funcional del conocimiento matemático, sino también a aspectos de formación condicionados por múltiples dimensiones de la realidad económica, política, social y cultural, en una variedad de contextos diferentes y en una diversidad de formas que requieren reflexión y acercamiento específico. Para ello, se necesita no solo la base sólida de conocimientos en matemática, sino también, comprender procesos y principios básicos, y contar con la flexibilidad necesaria para utilizarlos en diferentes situaciones.

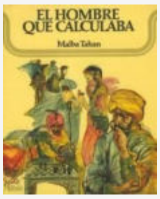
A través de su lectura se aspira a que los lectores adquieran tres competencias diferenciadas, la primera referida al conocimiento de hechos y sus representaciones, definiciones y cálculos, la segunda, a la posibilidad de establecer conexiones e integrarlas para resolver problemas y la tercera, en relación a la conceptualización de situaciones cotidianas, es decir reconocer y extraer las matemáticas implícitas en cada situación.

Además, cabe destacar, la participación de los autores del Proyecto sobre Escritura y Lectura en las disciplinas para primer año[1], en el marco del Programa de Ingreso, Continuidad y Egreso de estudiantes en las carreras de grado de la Universidad Nacional de Río Cuarto[2] aprobado por Resolución Nº380 /2015 del C.S.[3], en donde se observa la importancia de una sólida formación integrada y contextualizada que signifique a los estudiantes como protagonistas.

Al mismo tiempo, la propuesta fue desarrollada en concordancia con el Plan Estratégico Institucional y los lineamientos para la orientación a la innovación curricular de la UNRC aprobado por resolución N° 297/17 por C. S., intentando ser una propuesta pedagógica y curricular innovadora, diseñada para ofrecer un contexto de aprendizaje significativo, integral, sólido y relevante, en relación con el medio, las necesidades sociales y la historia.

Leer y escribir en matemáticas requiere que se piense sobre lo que significan las palabras, se interprete la información que proporcionan los gráficos, se comprendan y utilicen funciones matemáticas para describir un patrón de comportamiento.

Conocer las diferentes formas de expresión que usa la matemática permite tomar decisiones para hacer más accesibles algunos problemas, encontrar procedimientos más económicos o expresar resultados en forma más simple. En resumen, se requiere de una



"Hay una ciencia única, la Matemática, la cual nadie se puede jactar de conocer, porque sus conocimientos son, por su naturaleza, infinitos, y de la cual todos hablan, sobre todo los que más la ignoran" Fragmento extraído de la Novela "El hombre que calculaba" Pág. 57. https://goo.gl/2LBy7z

[1] PELPA
[2] UNRC
[3] Consejo Superior

cadena de razonamientos y la producción de informes, textos, que demandan de la aplicación de las técnicas que aportan las matemáticas, para que esas producciones no sean meramente intuitivas.

Los contenidos abordados en el ingreso y en la asignatura Análisis Matemático en sus dos modalidades, presencial y no presencial, de la Facultad de Ciencias Económicas, para las carreras de Contador Público, Licenciado en Administración y Licenciado en Economía, permiten utilizar la matemática en la descripción, análisis y resolución de problemas en el área de las Ciencias Económicas. Brindando herramientas útiles para la selección y organización de la información necesaria para la toma de decisiones. De esta forma se pretende alfabetizar matemáticamente para que los lectores puedan trabajar activamente con contextos reales.

Bajo esta idea y dentro del enfoque de enseñanza de prácticas situadas, se procura, a través del planteo de problemas cotidianos, que se relacionen los conceptos disciplinares trabajados que se encuentran plasmados a lo largo de los contenidos abordados. Comenzando con el estudio de los números reales y los conceptos básicos de funciones de una variable, para luego y en referencia a que todo fenómeno es una manifestación de cambio; el crecimiento de una organización, los ciclos de empleo, los índices de la bolsa de valores, el resultado de la balanza comercial, el crecimiento del Producto Bruto Interno; se introduce la idea de cambio y crecimiento a través de la noción de límite y continuidad, sobre la que se desarrolla la teoría del cálculo diferencial analizando el comportamiento no solo de la relación funcional entre variables, sino también el comportamiento de las funciones derivadas, que permiten estudiar la forma y la rapidez con que se producen los cambios, la optimización y los ritmos de cambios.

Para dar inicio a este camino, te proponemos que veas el video disponible en el siguiente link:

https://goo.gl/2HbmjT

GLOSARIO

Para hacer uso del lenguaje matemático preciso, en la Tabla N°1, te brindamos a continuación este glosario que contiene los símbolos y notaciones que le son propias.

Símbolos y Notaciones usados en Matemática:

$\in$: "pertenece a" o "perteneciente a"	∞: "infinito"
$\notin$: "no pertenece" o "no perteneciente a"	$\lvert a \rvert$: "módulo de a" o "valor absoluto de a"
$\Longrightarrow$: "implica" o "entonces"	$<$: "es menor que"
$\Leftrightarrow$: "implica doblemente" o "sí y sólo si"	$\leq$: "es menor o igual que"
/: "tales que"	$>$: "es mayor que"
$\wedge$: "y"	$\geq$: "es mayor o igual que"
$\vee$: "o"	$\cap$: "intersección"
$\forall$: "cualquiera sea" o "para todo"	$\cup$: "unión"
$\exists$: "existe al menos uno"	$\mathbb{Q}$:" Números Racionales"
$\therefore$: "en consecuencia" o "por tanto"	$\mathbb{R}$:" Números Reales"
$=$: "igual"	I :" Números Irracionales"
$\neq$: "distinto" o "no es igual"	$\mathbb{N}$:" Números Naturales"
ε: "Épsilon"	$\mathbb{Z}$:" Números Enteros"
δ: "Delta"	F :" Números Fraccionarios"
	Δ:" Discriminante"
	Δy :" Incremento absoluto de la función"
	Δx :" Incremento absoluto de la variable independiente"

Tabla N° 1

Organización y modalidad de lectura del libro

Los conceptos desarrollados en los capítulos del texto serán relacionados con diferentes dimensiones de la realidad económica, política, social y cultural, en una variedad de contextos diferentes y en una diversidad de formas que requieren reflexión y acercamiento específico.

Cada tema abordado está organizado en una primera parte teórica con ejemplos cotidianos que te mostrarán el camino de cómo aplicar la teoría y en una segunda parte mediante actividades que te desafían a reconocer y extraer las matemáticas implícitas en cada situación.

De esta manera, te encontrarás con preguntas a responder, informes a elaborar, lo que ayudará a reflexionar sobre los conocimientos adquiridos, utilizando diferentes formatos, tablas y gráficos para favorecer una construcción de conocimiento comprensivo, relacionando el herramental de la disciplina con cuestiones de la vida diaria y de las ciencias económicas.

El siguiente formato te indica que:

Aquí encontrarás contenido destacado.

Además, hemos insertado íconos que te irán señalando si se trata de una actividad a resolver u observaciones a las que debes prestar especial atención, recordatorios de conceptos que has aprendido en tu paso por el nivel medio, tal como se muestran en la Tabla N°2 y N°3:

Icono	Descripción
	Este ícono indicará una **OBSERVACIÓN**, **NOTA** o **ACLARACIÓN** referida al contenido que se está desarrollando.
	Este corresponde a **EJEMPLOS**.
	Te indica que es una **ACTIVIDAD** que te desafía a poner en práctica tus conocimientos.
	Te indica que es la **RESOLUCIÓN** de una **ACTIVIDAD** que te desafía a poner en práctica tus conocimientos.
	**ACTIVIDAD DE INVESTIGACIÓN**.
	**ACTIVIDAD EVALUABLE**.

Tabla N° 2

Icono	Descripción
	Simboliza una **REFLEXIÓN**, un **INTERROGANTE** a responder.
	Prestar especial **ATENCIÓN** al comentario que realizamos. Indica contenido **IMPORTANTE**.
	**PROCESOS TEMPORALES**.
	Indica la **PÁGINA WEB** a la que se puede acceder para el fin que se especifique.
	**BIBLIOGRAFÍA** que se podrá consultar para ampliar los temas abordados en este módulo.

Tabla N° 3

CAPÍTULO Nº1:

NÚMEROS REALES Y FUNCIONES

Objetivos:

Al finalizar este primer capítulo deberás ser capaz de:

- ✓ Revisar la estructura del campo numérico real y su representación en la recta numérica.
- ✓ Observar el uso de los números reales en aplicaciones de la vida cotidiana.
- ✓ Distinguir una función en sus distintas formas de representación: mediante una expresión algebraica, una gráfica, una expresión coloquial y una tabla de valores.
- ✓ Clasificar los distintos tipos de funciones.
- ✓ Interpretar el comportamiento de las funciones en modelos económicos.

Contenidos:

1. Números Reales y Funciones

En este capítulo abordaremos el concepto de **números reales** y de las **relaciones funcionales** que surgen entre variables. Su estudio se formalizará a partir de las distintas representaciones: algebraicas, gráficas, expresiones coloquiales y tabla de valores.

A partir de situaciones sencillas que se presentan en la vida diaria, se comenzará reconociendo que existen variables que muestran alguna relación de dependencia. El estudio se centrará principalmente en el concepto de **función**, que constituye el pilar fundamental del análisis matemático. Conocer los distintos tipos de funciones permite la **modelización matemática** de situaciones relacionadas con las Ciencias Económicas.

De las funciones, se analizará el dominio e imagen, el comportamiento gráfico, identificando puntos notables, intervalos de crecimiento o decrecimiento, intervalos en los cuales asumen valores positivos, negativos o nulos y valores extremos.

Para abordar satisfactoriamente estos conceptos se deberán tener presentes los conocimientos aprendidos en el nivel medio, en cuanto a propiedades y operaciones de los números reales, ecuaciones, factorización de expresiones racionales y propiedades de exponentes y radicales.

1.1 Los Números Reales

"Un número es la expresión de una cantidad con relación a su unidad".

Los conocimientos matemáticos surgen ligados a cuestiones prácticas. El desarrollo de la teoría de los números es paralelo al de la medida, la ampliación del campo numérico viene de la mano de las necesidades de medición.

Establecer la medida de una magnitud permite el desarrollo de los números racionales, ya que la unidad elegida, muchas veces, no puede ser contenida una cantidad entera de veces.

Los problemas de las mediciones de magnitudes no se terminan, aunque consideremos la totalidad de los números racionales, ya que no siempre es posible establecer el resultado de una medición con ellos. Pensemos, por ejemplo, en el caso de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno. Es por ello que resulta necesario un conjunto más grande que contenga a todos los números.

Los conjuntos numéricos fueron elaborados lentamente a través de los tiempos; para llegar a los conceptos que hoy nos parecen sencillos y lógicos, pasaron muchos siglos y diferentes culturas realizaron sus aportes.

Los **conjuntos numéricos** son agrupaciones de números que guardan una serie de **propiedades que los caracterizan**.

El concepto de número surgió en la antigüedad, ampliándose y generalizándose con el tiempo. En el mundo occidental antiguo, Babilonia, Grecia, Egipto y Roma, desarrollaron elevados conocimientos matemáticos, que fueron aplicados a importantes obras agrícolas y arquitectónicas. Por su parte en el mundo oriental, se observa ya en el siglo III a. C., en la cultura china, que los números negativos son representados mediante barras de color negro y los números positivos por barras de color rojo.

Hacia el año 500, en la India, se plasmaron los orígenes de nuestro sistema de numeración. El principio de posición, valor relativo de las cifras, las nueve cifras y el cero aparecen en las obras del matemático Brahmagupta. En el año 772, una embajada india llevó a Bagdad los libros que recogían estos conocimientos y en la primera mitad del siglo IX se recopilaron los nuevos métodos matemáticos en el tratado de Al-Khwarizmi, siendo difundido por la civilización musulmana en Sicilia y España.

En 1202 el mercader Leonardo Pisano, reunió los conocimientos de aritmética y álgebra en su obra llamada Liber Abaci, difundiendo por Europa la numeración india. En el siglo $XIII$, el matemático italiano Fibonacci, introdujo los números negativos, a raíz de un problema referente al dinero que no tenía una solución positiva, observando así su necesidad.

En el siglo XV se aceptó que algunas ecuaciones tuvieran solución con números negativos. En el siglo XVI, se popularizo el uso de la barra horizontal para separar los términos de una fracción. El problema de los números irracionales no se resolvió por completo hasta el siglo $XVII$, cuando Fermat, matemático francés, considerado el padre de la moderna teoría de los números, demostró que expresiones como raíz cuadrada de tres no eran números racionales. En 1777, Euler solucionó el problema de las raíces negativas. En 1799, Gauss, demostró que las soluciones de cualquier ecuación algebraica, fuera cual fuese su grado, pertenecía a un conjunto de números que él llamó complejos, a los que consideró compuestos de un número ordinario, hoy llamado número real, más un múltiplo de la unidad imaginaria i, donde $i^2 = -1$.

Entre el siglo XVI al XIX, se produjo el desarrollo conceptual de los números reales. En cuanto a las unidades de medición, en el pasado había una multitud de unidades de medida distintas, cada región usaba su propio sistema. Tras la Revolución Francesa se crea un nuevo sistema de medidas: el **Sistema Métrico Decimal**, que fue adoptado por un sin número de estados por ser un sistema regular, debido a reglas que organizan sus unidades de medida y la coherencia interna entre las distintas magnitudes. El metro se presentó formalmente en junio de 1799 bajo el lema ***"Para todos los pueblos, para todos los tiempos"***.

UN POCO DE HISTORIA

El **tratado de Al-Khwarizmi**, describe con detalle el sistema hindú de numeración posicional de base diez y la manera de hacer cálculos con él. Su tratado de álgebra es una introducción compacta al cálculo, usando reglas para completar y reducir ecuaciones. Además de sistematizar la resolución de ecuaciones cuadráticas, también trata geometría, cálculos comerciales y de herencias.

En la historia del mundo contemporáneo, la **Revolución Francesa** significó el tránsito de la sociedad estamental, heredada del feudalismo, a la sociedad capitalista, basada en una economía de mercado. Los revolucionarios franceses crearon un nuevo modelo de sociedad y estado, difundiendo un modo de pensar que fue adoptado por la mayor parte del mundo occidental.

A partir del 20 de mayo de 2019, el sistema de medición sufrirá un cambio, la unidad de medida "kilogramo" será redefinida en el Sistema Internacional de Medidas, que rige desde 1889. En la Conferencia General de Pesos y Medidas, del 16 de noviembre de 2018 realizada en París, expertos de 42 países acordaron una nueva definición del kilo. Su definición tendrá como base una fórmula matemática y ya no dependerá de la magnitud de un objeto físico. Lo que permite un sistema más preciso y asequible en cualquier lugar del mundo.

Definición de Números Reales

El conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$) está formado por la unión de los **números racionales** y los **números irracionales**.

Los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) son aquellos que pueden **expresarse como fracción de números enteros**. Por lo tanto, pertenecen a este conjunto los números naturales ($\mathbb{N}$), los números enteros ($\mathbb{Z}$) y los números racionales no enteros, también llamados fraccionarios (F) que se componen por las expresiones decimales y las periódicas.

Los **números irracionales** (I) son aquellos que **no pueden escribirse como fracción de números enteros** y no tienen período (su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas).

En el siguiente esquema se presentan a los diferentes conjuntos numéricos con los que trabajaremos a lo largo de la asignatura:

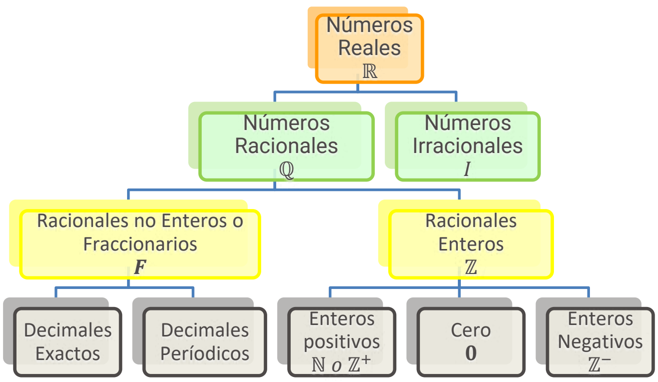
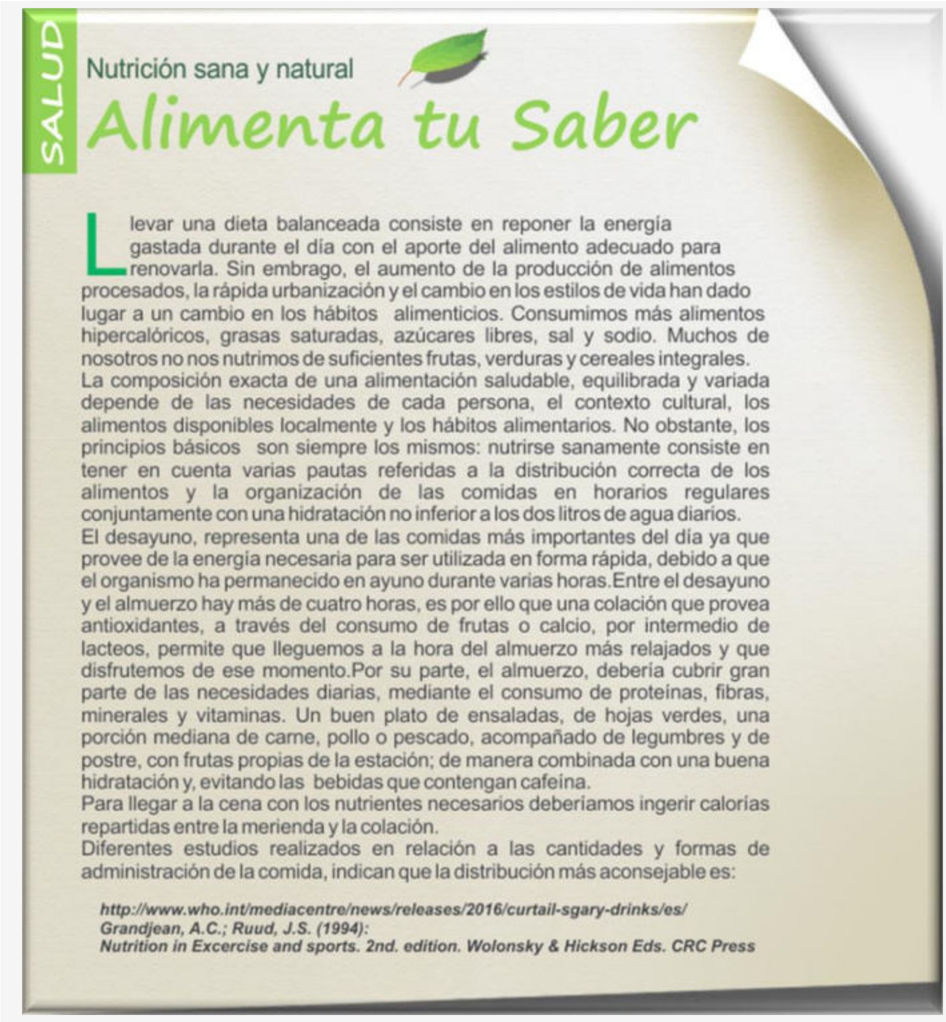


Fig: 1.: Los Números Reales

CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚMEROS REALES

1) Forman un conjunto infinito, que no tiene ni primer ni último elemento.
2) Entre dos números reales hay infinitos números reales.
3) A cada número real, le corresponde un único punto en la recta numérica.
Recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un solo número real. El conjunto $\mathbb{R}$ "completa" o "llena" la recta numérica.

Para una mejor comprensión trabajaremos con un ejemplo cotidiano en el que distinguiremos los números que forman el conjunto de los números reales.


SALUD

Nutrición sana y natural

Alimenta tu Saber

Llevar una dieta balanceada consiste en reponer la energía gastada durante el día con el aporte del alimento adecuado para renovarla. Sin embrago, el aumento de la producción de alimentos procesados, la rápida urbanización y el cambio en los estilos de vida han dado lugar a un cambio en los hábitos alimenticios. Consumimos más alimentos hipercalóricos, grasas saturadas, azúcares libres, sal y sodio. Muchos de nosotros no nos nutrimos de suficientes frutas, verduras y cereales integrales.
La composición exacta de una alimentación saludable, equilibrada y variada depende de las necesidades de cada persona, el contexto cultural, los alimentos disponibles localmente y los hábitos alimentarios. No obstante, los principios básicos son siempre los mismos: nutrirse sanamente consiste en tener en cuenta varias pautas referidas a la distribución correcta de los alimentos y la organización de las comidas en horarios regulares conjuntamente con una hidratación no inferior a los dos litros de agua diarios.
El desayuno, representa una de las comidas más importantes del día ya que provee de la energía necesaria para ser utilizada en forma rápida, debido a que el organismo ha permanecido en ayuno durante varias horas.Entre el desayuno y el almuerzo hay más de cuatro horas, es por ello que una colación que provea antioxidantes, a través del consumo de frutas o calcio, por intermedio de lacteos, permite que lleguemos a la hora del almuerzo más relajados y que disfrutemos de ese momento.Por su parte, el almuerzo, debería cubrir gran parte de las necesidades diarias, mediante el consumo de proteínas, fibras, minerales y vitaminas. Un buen plato de ensaladas, de hojas verdes, una porción mediana de carne, pollo o pescado, acompañado de legumbres y de postre, con frutas propias de la estación; de manera combinada con una buena hidratación y, evitando las bebidas que contengan cafeína.
Para llegar a la cena con los nutrientes necesarios deberíamos ingerir calorías repartidas entre la merienda y la colación.
Diferentes estudios realizados en relación a las cantidades y formas de administración de la comida, indican que la distribución más aconsejable es:

http://www.who.int/mediacentre/news/releases/2016/curtail-sgary-drinks/es/
Grandjean, A.C.; Ruud, J.S. (1994):
Nutrition in Excercise and sports. 2nd. edition. Wolonsky & Hickson Eds. CRC Press

Fig. 2.: Nutrición Sana y Natural

De la lectura anterior supone que, para considerar un desayuno saludable, que aporte la cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas se deba ingerir un vaso de leche, una manzana y una barra de cereal.

¿Con qué conjunto de números estamos trabajando para los alimentos consumidos?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Cantidad	Producto
1	Vaso de leche
1	Manzana
1	Barra de cereales

Tabla N° 4

Este conjunto representa el conjunto de los **números naturales**:

$$\mathbb{N}: \{1,2,3,\cdots\} \text{ ó } \{x/x \in \mathbb{N}\}$$

Lo simbolizamos entre llaves, nombrando los primeros elementos y escribiendo tres puntos suspensivos, dado que el listado continúa sin fin. Con este conjunto podemos sumar y multiplicar, obteniendo como resultado otro número natural, pero no siempre es posible restar y dividir dos números naturales y obtener como resultado otro número natural.

Surge entonces:

El conjunto de los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-: \{\cdots, -4, -3, -2, -1\}$), junto al cero $\{0\}$ y a los naturales (también llamados enteros positivos, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$), forman el conjunto de los **números enteros**:

$$\mathbb{Z} = Z^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

En este conjunto es posible resolver, además de la suma y multiplicación, la resta y obtener como resultado otro número entero.

Si quisiéramos saber la cantidad de calorías que aportan estos alimentos:

https://goo.gl/qqwXbi

PRODUCTO	KCALORIAS /100GR	PROTEINAS /100GR	GRASAS /100GR	CARBOHIDRATOS /100GR	PRECIO POR UNIDAD DE MEDIDA	UNIDAD DE MEDIDA
LECHE	KCALORIAS /100GR	PROTEINAS /100GR	GRASAS /100GR	CARBOHIDRATOS /100GR	PRECIO POR UNIDAD DE MEDIDA	UNIDAD DE MEDIDA
Leche Desnatada	33	3,4	0,2	4,7	$ 12,52	1032gr (1 litro)
FRUTAS	KCALORIAS /100GR	PROTEINAS /100GR	GRASAS /100GR	CARBOHIDRATOS /100GR	PRECIO POR UNIDAD DE MEDIDA	UNIDAD DE MEDIDA
Manzana	45	0,2	0,3	10,4	$ 39,90	1000gr
CEREALES	KCALORIAS /100GR	PROTEINAS /100GR	GRASAS /100GR	CARBOHIDRATOS /100GR	PRECIO POR UNIDAD DE MEDIDA	UNIDAD DE MEDIDA
Barra de Cereales	406	11	16	54	$ 7,50	30gr (1 Barra)

Tabla N° 5

Es importante destacar que no es posible enumerar a todos los elementos que componen el conjunto de los números naturales, pero en vez de ello, podemos expresar cuáles son sus elementos a través de una condición que se establece entre llaves y utilizando el símbolo " / " (tal que). Esta forma de denotar al conjunto se denomina **por comprensión**.

Los elementos de un conjunto numérico se listan de menor a mayor.

Para calcular las calorías que tiene un vaso de leche, primero se debe obtener la cantidad de calorías que tiene un litro de leche.

Un litro de leche $340{,}56\ KCa$ → Un vaso de leche $85{,}14\ KCal$

Fig. 3.: Proporciones y Equivalencias

Dentro del conjunto de los números enteros, no todas las divisiones de dos números enteros dan como resultado otro número entero y esto ocurre cuando el **dividendo** no es múltiplo del **divisor**.

Los **números fraccionarios**, F, dan solución a esta situación y junto a los enteros forman el conjunto de los números racionales, simbolizado con una $\mathbb{Q}$. Este último conjunto, comprende a todo número que pueda expresarse como un cociente $\frac{p}{q}$, donde tanto "p" como "q" son enteros y $q \neq 0$.

Hay dos maneras de escribir un mismo número racional, como fracción o en forma decimal resolviendo el cociente.

Existen números que no son racionales como, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado lado 1 mide una longitud igual a la raíz cuadrada de 2, es decir $\sqrt{2}$. Esta expresión no puede escribirse como un cociente de números enteros. Es por ello que, $\sqrt{2}$ lleva el nombre de número irracional (Ver Fig. 4).

Otros números irracionales son: $\sqrt{3}, \sqrt{7}, -\sqrt{10}, \pi$. Este último (Ver Fig. 4) es la razón entre la distancia alrededor de un círculo (*su circunferencia*) y la distancia a través de él (*su diámetro*).

Así se completa el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con el subconjunto de los números irracionales, I:

Los números irracionales, I, no pueden ser escritos como una división entre enteros y se expresan **con infinitas cifras decimales NO periódicas**. Algunos provienen de raíces no exactas.

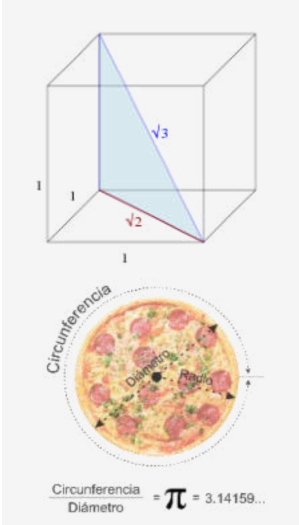


Fig. 4.: Números Irracionales

Para trabajar con los conjuntos numéricos se deben recordar las operaciones y sus propiedades, las expresiones algebraicas, las ecuaciones e inecuaciones. Puedes consultar estos temas en el libro *Módulo de Matemática*. Autores: S. Butigué, N. Scattolini, S. Cabrera, S. Curti, M. Lardone, S. Mussolini y J. M. Gallardo.

1.1.1 Representación de los Números Reales en la Recta

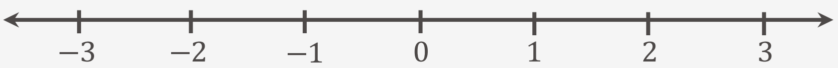
Seguramente ya conoces cómo representar a los números en una recta numérica, pero ¿cómo la introducimos en nuestra vida cotidiana? En los textos que leemos es frecuente encontrar referencias a lustros, décadas, etc. Trabajar con magnitudes es objeto sistemático no solo de la matemática, sino también de la historia.

Para comprender la relación biunívoca que existe entre los puntos de la recta y los números reales, es posible pensar que, al representar diferentes acontecimientos transcurridos en el tiempo, se tiene la percepción intuitiva de que éste es una magnitud continua, que transcurre sin saltos ni interrupciones.

Una recta es la representación ideal del tiempo, que viene desde el menos infinito, se extiende hacia el infinito y que en cada punto de la recta representa un instante en el tiempo, un número real. Además, los días, las semanas, meses, años, lustros, décadas, siglos, milenios, etc. son intervalos de diferentes tamaños contenidos dentro del campo numérico real.

Definición de Recta Numérica o Recta Real:

La recta numérica o recta real es un gráfico unidimensional de una línea recta, la cual contiene a todos los números reales mediante una correspondencia biunívoca, en donde se asocia cada número con un punto de la recta.



De esta manera, a cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta.

Para representar un punto en la recta, se selecciona un punto que representa el cero, llamado origen, luego se elige un segmento unidad, cuya medida se marca sucesivamente a la derecha y a la izquierda del cero. Las posiciones a la derecha del origen son consideradas positivas y a la izquierda negativas.

Al construir una gráfica del tiempo, las medidas se hacen a partir de un punto de referencia que como es lógico representa un instante. Podemos tomar como referencia el nacimiento de Cristo para considerar el momento cero, y en base a esto, ubicar instantes en el tiempo que se encuentran antes y después. Cómo por ejemplo el conocimiento de la utilidad del fuego para procurar de luz, calor y cocer alimentos, la construcción de las primeras ruedas, la escritura. Mientras que, la Revolución Francesa, la caída de la bolsa en Wall Street, la sanción de la de la Ley de Convertibilidad del Austral, se produjeron en momentos de tiempo posteriores. Ese punto que simboliza un instante, a partir del cual se miden los hechos en la gráfica, se representa por cero. A partir del abordaje del **Capítulo N°3**, profundizaremos

Una **variable** es una propiedad característica, susceptible de tomar diferentes valores, los cuales se pueden observar y medir. Las variables se pueden clasificar en: **cualitativas**, aquellas que no se pueden medir numéricamente, como la nacionalidad, el color de la piel, el sexo y **cuantitativas**, aquellas que tienen un valor numérico, como la edad, el precio de un producto, los ingresos anuales de un consumidor. Estas últimas a su vez, pueden clasificarse en **discretas** o **continuas**. Las **discretas,** solo pueden tomar valores enteros, como por ejemplo el número de plantas atacadas por una peste, el número de crías por parición, los hermanos en una familia. **Continuas**, pueden tomar cualquier valor real dentro de un intervalo o rango, como el peso, el tiempo, el rendimiento de una empresa, etc.

1.1.2 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 1: Lee el texto que encontraras en el siguiente link y se te solicita que:

https://goo.gl/vkqWXx

a) Elabores un desayuno saludable para una persona deportista y una que no practique deportes.
b) Representes en la recta numérica los valores obtenidos.
c) Clasifiques a qué conjunto de números pertenecen los valores obtenidos.

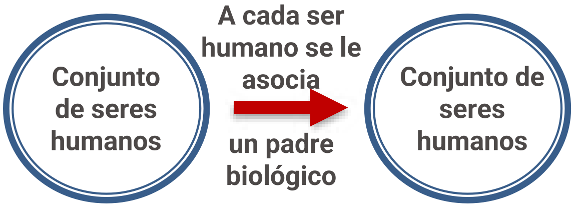
1.2 Relación

Definición de Relación:

Una relación es un vínculo o una correspondencia que hay entre dos o más cosas.

Las aplicaciones de las relaciones trascienden los límites de la ciencia, a diario solemos hacer uso de sus principios muchas veces de manera inconsciente. Seres humanos, edificios, electrodomésticos, películas y amigos, entre otros muchos, son algunos de los conjuntos más comunes de interés para nosotros, y cotidianamente establecemos relaciones entre ellos para organizarnos y participar de nuestras actividades.

Se define la relación entre seres humanos “a cada ser humano se le asocia un padre biológico”.



Todo ser humano tiene un único padre biológico. No todo ser humano es un padre biológico.

Fig. 5.: Ejemplo de Funciones

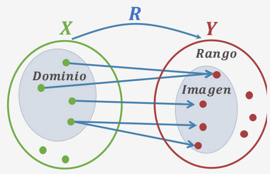
Definición de Relación Matemática:

Una **relación matemática** entre dos conjuntos X e Y es una **regla o ley de correspondencia** que vincula elementos del conjunto X con elementos del conjunto Y. Los conjuntos X y Y se denominan respectivamente, **Conjunto de Partida** y **Conjunto de llegada o Rango** de la relación.

El **dominio de una relación** es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de partida que están relacionados con, al menos, un elemento del conjunto de llegada.

La **imagen de una relación** es el conjunto formado por los elementos del conjunto de llegada que están relacionados con algún elemento del dominio de la relación.

RELACIÓN



https://goo.gl/MPQahR

Lee atentamente el siguiente informe:

Por cuarto año consecutivo, FADA[4] publicó **“El campo argentino en números”.** Este trabajo refleja los aportes del campo argentino durante el año 2017 en **producción, PBI, recaudación tributaria, divisas por exportaciones y empleo**.

Fig. 6.: Informe FADA 2017

[4] Fundación Agropecuaria para el Desarrollo de Argentina

¿La relación del campo argentino con la producción, el PBI, la recaudación tributaria, las divisas por exportaciones y el empleo genera un vínculo o una correspondencia? ¿Por qué?

1.3 Función

Gottfried Wilhelm Leibniz introdujo el término ***función*** en el vocabulario matemático en el siglo $XVII$. Se trata de uno de los conceptos elementales de las matemáticas, y es esencial para el estudio del cálculo.

Con frecuencia, la palabra función, no se utiliza correctamente. A lo largo de décadas la economía argentina comienza su ciclo expansivo en función de un aumento progresivo de los precios de las materias primas y la disminución de las tasas de interés, lo que incentiva a capitales internacionales a invertir en países periféricos como el nuestro[5].

Commodities es un término que proviene del idioma inglés, corresponde al plural del término commodity que en esta lengua se utiliza para denominar a los productos, mercancías o materias primas. Representa a todo bien que tiene valor o utilidad, y un muy bajo nivel de diferenciación o especialización.

¿Puedes afirmar que el alza en los precios de los commodities está en función de la baja o disminución de las tasas de interés?

A pesar de que esto sucedió muchas veces, no se puede afirmar que la cantidad de **entrada**, la tasa de interés, determina la cantidad de **salida**, el precio de las materias primas.

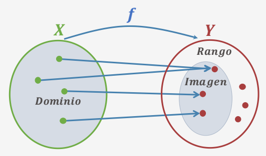
[5] Seggiaro, C. (2015). La Economía Argentina. De dónde venimos y hacia dónde vamos. Eduvim, Villa María.

Definición de Función:

Una ***función*** es una regla o ley de correspondencia que asigna **a cada número de entrada exactamente un número de salida**.

Al conjunto de números de *entradas* para el cual se le aplica la regla, se llama **dominio** de la función. Al conjunto de todos los números posibles de *salida* se lo llama **rango**.

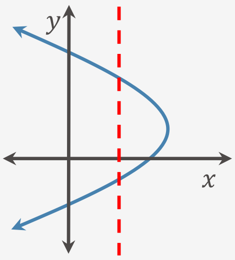
FUNCIÓN



Una **función** modeliza una situación en la que existe una relación de dependencia entre dos variables que intervienen en dicha situación. La variable que representa los **números de entrada** para una función se denomina **variable independiente**. La variable que representa los **números de salida** se denomina **variable dependiente**, porque su valor depende de la variable independiente.

Se dice que la variable dependiente es una función de la variable independiente.

La siguiente representación gráfica es una relación.



NO ES UNA FUNCIÓN

Definición de Dominio

El conjunto **Dominio** de una función está formado por todos los valores que toma la variable independiente.

Se simboliza: $\boldsymbol{Dom\ f}$

Para establecer el dominio de una función, se deberá considerar:

El **Contexto del Problema**: por ejemplo, si la variable independiente son los días transcurridos en el mes hasta que se produce la variación en el precio de un bien, se puede decidir limitar el dominio a valores mayores que 1 pero menores a 30 días.

La propia **Decisión de quien propone el Análisis**: si a un administrador le interesa analizar particularmente, costo de unidades producidas, es probable que circunscriba su análisis al nivel de producción que tenga la empresa u organización.

Las **Limitaciones analíticas de la Expresión Algebraica**: cuando la función, relaciona dos conjuntos de números y solo disponemos de la fórmula o expresión algebraica que representa la relación entre las dos variables, el dominio es el conjunto más grande de números para el cual la expresión tiene sentido. Es decir, el conjunto de valores para los cuales se pueden efectuar las operaciones que permiten la aplicación de la regla o formula.

Definición de Imagen

El conjunto Imagen de una función es un subconjunto del Rango y está formado por los valores que toma la función.

Se simboliza: $\boldsymbol{Im\ f}$.

Si se observa la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y se determina el dominio y la imagen.

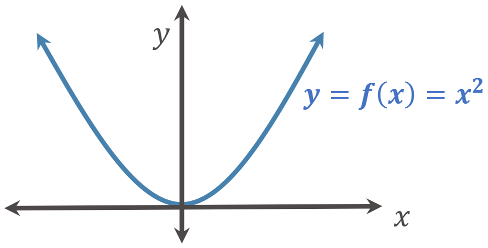


Fig. 7.: $f(x) = x^2$

Resolución:

Al observar la gráfica y analizando la expresión algebraica, el conjunto dominio, corresponde al conjunto más grande de valores que pueda asumir la variable x, que es el propio conjunto de números reales, ya que cualquier valor real de x elevado al cuadrado dará como resultado otro número real.

De este modo escribimos:

$$Dom\ f = \{x / x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$$

Encontrar la imagen de una función analíticamente, no es sencillo. Por ello, en este caso la obtendremos a partir del gráfico de la función.

$$Im\ f = [0; +\infty)$$

Si se observa la Fig. 7, el ejemplo proporciona la clave para que el uso de la palabra función sea preciso:

*"Para **cada valor de entrada**, x, existe exactamente **un valor de salida**, y, pero, pueden existir **más de un valor de entrada**, x, al que le corresponda **el mismo valor de salida, y**".*

La **imagen** de una función gráficamente se la obtiene **proyectando cada uno de los puntos** del gráfico de la función sobre el eje de ordenadas y el segmento que se obtiene es la imagen.

https://goo.gl/i2gPd7

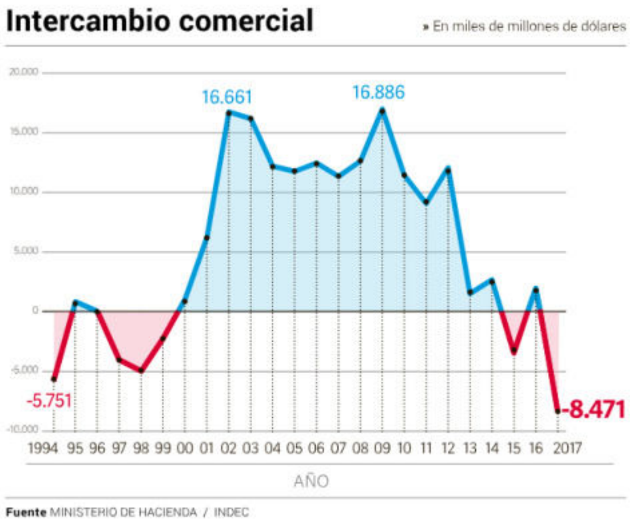


Fig. 8.: Balanza Comercial Argentina

La gráfica corresponde a la **balanza comercial argentina** desde el año 1994 al 2017. **El superávit** comercial se encuentra representado por los períodos coloreados con **azul (por encima de la ordenada cero)** y **el déficit** comercial en los coloreados con **rojo (por debajo de la ordenada cero)**.

La **balanza comercial** es un registro de importaciones y exportaciones de un país en determinado período. El saldo de la balanza comercial es la diferencia del total de las exportaciones y el total de las importaciones que se manejan en el país.

¿Puedes determinar cuál es la variable independiente y cuál la dependiente de la situación bajo estudio?, ¿en qué unidades se encuentran medidas?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

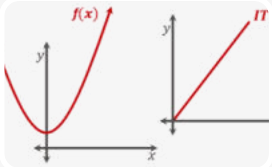
1.3.1 Representaciones de una Función

Existen diferentes formas de representar a una función. **Verbalmente**, mediante una descripción en palabras. **Numéricamente**, a través de una tabla de valores. **Visualmente,** con una gráfica. **Algebraicamente**, con una fórmula explícita.

A menudo resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir un conocimiento adicional de una función.

$$O(p) = p^2$$
$$C(x) = 2x + 350$$
$$M(t) = C(1 + i)^t$$

x	$f(x)$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27



La **Expresión Analítica** de una función es una ecuación que relaciona la variable dependiente con la variable independiente.

Los pares de valores (x, y) que obtenemos de una función los podemos organizar en una tabla denominada **Tabla de Valores** de la función.

El **Sistema de Coordenadas Rectangulares** permite representar funciones.

Fig. 9.: Representaciones de una Función

Observa nuevamente la Fig. 8 de la Balanza Comercial Argentina ¿de qué forma está representada? ¿podemos afirmar que corresponde a una función? ¿en qué períodos hubo déficit y en cuáles superávit? ¿cuándo estuvo en alza y cuándo en baja?

....

....

....

....

....

....

1.3.2 Gráficas

El **sistema de coordenadas rectangulares** permite especificar y localizar puntos en un plano. También proporciona una manera geométrica de representar ecuaciones de dos variables, así como funciones.

Recordemos algunos conceptos

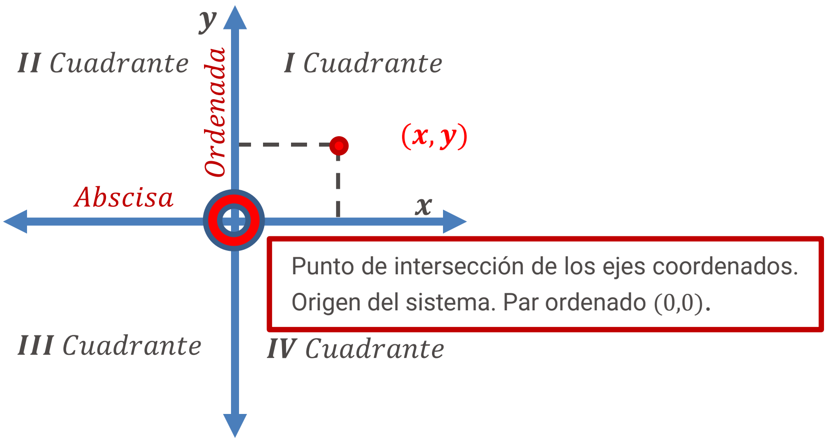
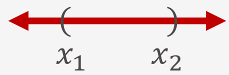


Fig. 10.: Sistema de Coordenadas Cartesianas

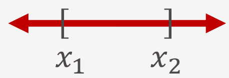
INTERVALOS

Conjunto de números reales comprendidos entre dos valores, llamados extremos del intervalo.

Intervalo abierto: $(x_1; x_2)$

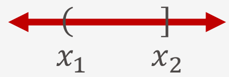


Intervalo cerrado: $[x_1; x_2]$

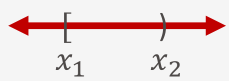


Intervalos semiabiertos:

$(x_1; x_2]$



$[x_1; x_2)$



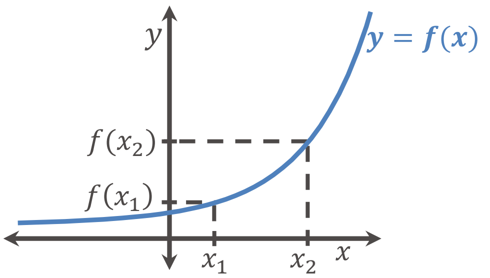
1.3.3 Interpretación de Gráficas

Los tramos en que una función crece o decrece, asume valores positivos, negativos o nulos, los puntos en que toma valores mayores o menores a los que le rodean, son todos aspectos muy importantes para el estudio de una función.

La representación gráfica de una función nos permite visualizar su comportamiento. Te recordamos algunos conceptos para que puedas interpretar gráficas.

Definición de Función Creciente

Una función f es **creciente** en un intervalo si para cualquier par de números x_1 y x_2 del intervalo tal que $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Gráficamente:

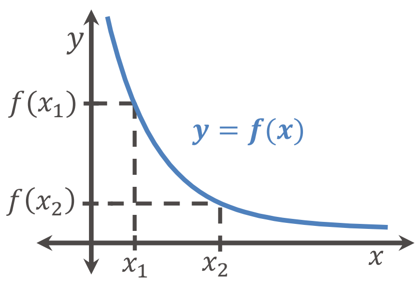


Es importante destacar que, los **intervalos del dominio** para los que la **función crece** son siempre **intervalos abiertos**.

Fig. 11.: Función Creciente

Definición de Función Decreciente

Una función f es **decreciente** en un intervalo si para cualquier par de números x_1 y x_2 del intervalo tal que $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$. Gráficamente:



Es importante destacar que, los **intervalos del dominio** para los que la **función decrece** son siempre **intervalos abiertos**.

Fig. 12.: Función Decreciente

Los intervalos para los que la función es creciente, decreciente, positiva, negativa o nula, son siempre intervalos que pertenecen al dominio de definición de la función.

Definición de Máximo Absoluto

Una función alcanza un **máximo absoluto** en $x = a$ si su ordenada $f(a)$ **es mayor o igual** que la ordenada de cualquier otro punto del dominio de la función.

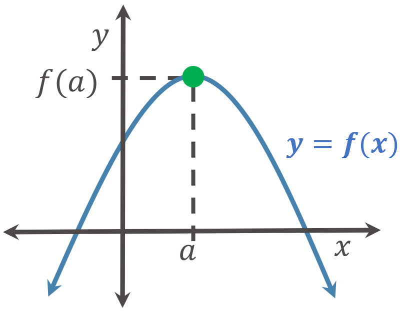


Fig. 13.: Máximo Absoluto

Definición de Mínimo Absoluto

Una función alcanza un **mínimo absoluto** en $x = a$ si su ordenada $\boldsymbol{f(a)}$ **es menor o igual** que la ordenada de cualquier otro punto del dominio de la función.

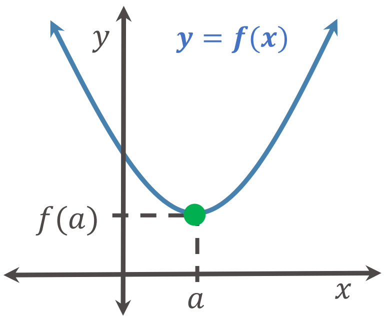


Fig. 14.: Mínimo Absoluto

Definición de Intervalos de Positividad y Negatividad

Intervalo de positividad es el conjunto formado por los valores de x para los cuales $\boldsymbol{f(x) > 0}$. Gráficamente corresponde al intervalo o intervalos del dominio (los valores de x), en los cuales **la curva se encuentra por encima del eje $\boldsymbol{x}$.**

Intervalo de negatividad es el conjunto formado por los valores de x para los cuales $\boldsymbol{f(x) < 0}$. Gráficamente corresponde al intervalo o intervalos del dominio (los valores de x), en los cuales **la curva se encuentra por debajo del eje $\boldsymbol{x}$.**

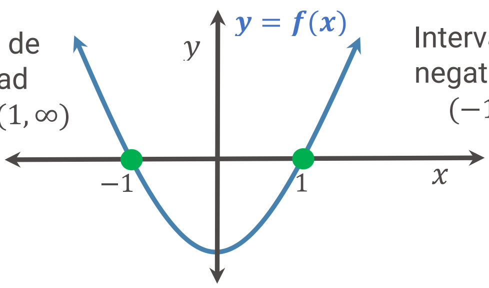


Fig. 15.: Intervalos de Positividad y Negatividad

1.3.4 Puntos Notables: Intersección y Simetrías

Los puntos notables de $y = f(x)$, son puntos que pertenecen al gráfico de la función y que son especialmente representativos.

Definición de intersección con los ejes coordenados

Intersección con el eje de ordenadas, es *el punto* de la función que tiene por coordenadas a: $(0, f(0))$, se obtiene cuando la **Variable Independiente toma el valor cero** $(\boldsymbol{x = 0})$.

Intersección con el eje de abscisas, son *los puntos* de la función que tiene por coordenadas a: $(x, 0)$, se obtiene cuando la **Variable Dependiente toma el valor cero** $(\boldsymbol{f(x) = 0})$.

Los valores que verifican la igualdad $\boldsymbol{f(x) = 0}$, conforman los ceros de la función o los valores que anulan a la función.

Definición de Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas, si una función f verifica que $f(x) = f(-x)$, entonces su gráfica es **simétrica respecto al eje $\boldsymbol{y}$**, y se dice que la función es **PAR**.

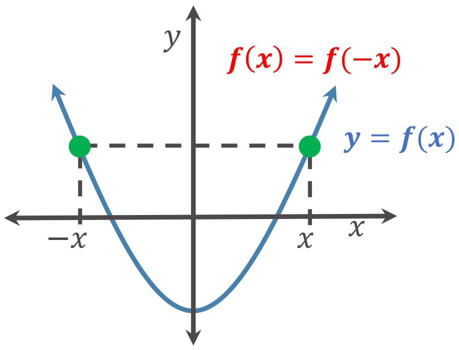


Fig. 16.: Función Par

Simetría respecto al origen del sistema de coordenadas, si una función f verifica que $f(x) = -f(-x)$, entonces su gráfica es **simétrica respecto al origen**, y se dice que la función es **IMPAR**.

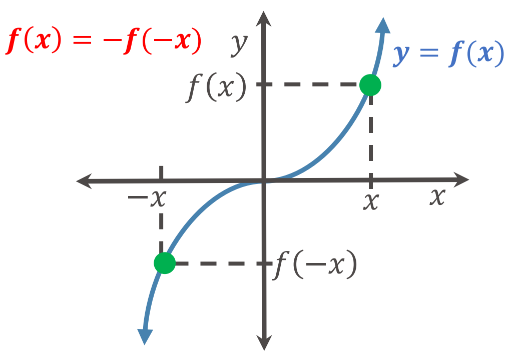


Fig. 17.: Función Impar

¿Puede una función ser simétrica respecto al eje de abscisas? Justifica tu respuesta.

....

....

....

....

....

1.3.5 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 2: Luego de observar la figura de la Balanza Comercial Argentina, se te solicita que respondas:

La gráfica corresponde a la **balanza comercial argentina** desde el año 1994 al 2017. **El superávit** comercial se encuentra representado por los períodos coloreados con **azul (por encima de la ordenada cero)** y **el déficit** comercial en los coloreados con **rojo (por debajo de la ordenada cero)**.

Datos del INDEC
https://goo.gl/i2gPd7

- **a)** ¿Cuál es el **dominio** y la **imagen** de la función?
- **b)** ¿Cuáles son los intervalos del dominio **(valores de x)** donde la función resulta **creciente**?
- **c)** ¿Cuáles son los intervalos del dominio **(valores de x)** donde la función resulta **decreciente**?
- **d)** ¿Cuáles son los intervalos del dominio donde la función resulta **positiva** y en cuáles **negativa**?
- **e)** ¿Cuáles son los valores del dominio donde la función es **nula**?
- **f)** ¿Para qué **valores de x** la función alcanza el **máximo absoluto** y el **mínimo absoluto**?

<u>ACTIVIDAD 3</u>: Realiza un informe, utilizando las herramientas matemáticas aprendidas, acerca del comportamiento de la Balanza Comercial Argentina en el período $1994 - 2017$. Si requieres más espacio, puedes utilizar una hoja adicional.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

1.4 Algunas Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

A continuación, se muestran en detalle algunas de las funciones más utilizadas.

Definición de Funciones Polinómicas

Son aquellas funciones cuya expresión algebraica es un **polinomio**.

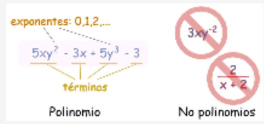
Una función polinómica de **grado** $\boldsymbol{n}$, siendo $a_n \neq 0$ y $\boldsymbol{n}$ **un número entero no negativo**, presenta la siguiente estructura:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Su **dominio** son todos los **reales**.

Ejemplo de funciones polinómicas son: las **funciones constantes**, las **funciones lineales** y las **funciones cuadráticas**, etc.

Puedes consultar este tema en el **Punto 2.1.1 del Capítulo N°2** del libro.



Los **polinomios** están constituidos por un conjunto finito de variables y constantes (llamadas coeficientes o parámetros), con las operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación, así como también exponentes enteros positivos. Pueden ser de una o de varias

Definición de Funciones Definidas por Segmentos

Son aquellas funciones para las que su regla de asignación está dada por **más de una expresión algebraica**. Algunos valores de la variable independiente se relacionan con sus correspondientes valores de imagen a través de una regla o fórmula, mientras que otros valores del dominio se relacionan a través de otra fórmula distinta a la anterior.

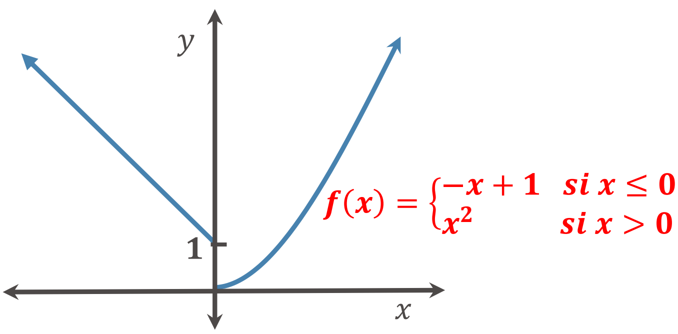


Fig. 18.: Función Definida por Segmentos

La fig. 18 muestra la gráfica de una **función definida por segmentos** y su correspondiente expresión algebraica.

Otra función que se considerará es la racional, la cual no va de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ ya que su dominio son los números reales que no hacen cero el denominador

Definición de Funciones Racionales

Son funciones definidas como el **cociente de polinomios**, de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \; con \; Q(x) \neq 0$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas. Siendo $Q(x) \neq 0$.

El dominio de una función racional, es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los cuales $Q(x) = 0$.

1.4.1 Guía de Actividades Prácticas

<u>**ACTIVIDAD 4**</u>**:** Para las siguientes funciones definidas por segmentos se te solicita que:

i) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & si\ x < 1 \\ x+3 & si\ x > 1 \end{cases}$ **ii)** $g(x) = \begin{cases} x+5 & si\ x \leq -3 \\ 2 & si\ -3 < x < 3 \\ -x+5 & si\ x \geq 3 \end{cases}$

a) Grafiques las funciones.

b) Para cada función determines: Dominio e imagen, intersección con los ejes coordenados e intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad.

<u>**ACTIVIDAD 5**</u>**:** Una empresa posee **altos costos de inventario** en una mercadería específica y desea reducirlos mediante una política de ventas atractiva para sus clientes. Para lograrlo, la mercadería tiene tres precios diferenciados de acuerdo a las cantidades adquiridas:

Precio	Cantidades Vendidas
150	Menos de 10 unidades
130	Entre 10 y 30 unidades
110	Más de 30 unidades

Se te solicita que:

a) Representes algebraicamente el ingreso de la empresa según la política de ventas de la misma, considerando alguna de las funciones estudiadas en el punto 1.5.

b) Realices la representación gráfica.

c) Elabores un breve informe de acuerdo a lo aprendido en esta actividad.

Los **costos de inventario** son aquellos que están relacionados con el almacenamiento, aprovisionamiento y mantenimiento del inventario en determinado período de tiempo.

1.5 Combinación de Funciones

Existen tres formas de combinar funciones para crear una nueva función.

1.5.1 Por Medio de Adición, Sustracción, Multiplicación y División de Funciones

Suponga que I y C son las funciones dadas por:

$$I(x) = 5x^2 \text{ y } \quad C(x) = 3x + 2500$$

La diferencia o sustracción entre $I(x)$ y $C(x)$ se obtiene haciendo $I(x) - C(x) = 5x^2 - (3x + 2500)$

Esta operación define una **nueva función** llamada **diferencia o sustracción** de $I(x)$ y $C(x)$.

Supone que la función $I(x)$, es una función Ingreso y la función $C(x)$, es una función Costo de un determinado producto. ¿La diferencia de los Ingresos y los Costos qué representa?

………

………

………

Puedes consultar este tema en el **Punto 2.1.1 del Capítulo N°2** del texto.

Definición de Operación de Funciones por Medio de Adición, Sustracción, Multiplicación y División:

En general, para cualesquiera funciones f y g, se define la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** $f.g$ y el **cociente** $\frac{f}{g}$ como sigue:

$\boxed{(f+g)(x) = f(x) + g(x)}$	$\Rightarrow$	**Adición o Suma** de f mas g
$\boxed{(f-g)(x) = f(x) - g(x)}$	$\Rightarrow$	**Sustracción o Diferencia** de f menos g
$\boxed{(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)}$	$\Rightarrow$	**Producto** de f por g
$\boxed{\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \; para \; g(x) \neq 0}$	$\Rightarrow$	**Cociente** de f sobre g

En cada una de las cuatro combinaciones, se supone que x se encuentra en los dominios tanto de f como de g.

El dominio de $f + g$, $f - g$, $f.g$, es la intersección de los dominios de f y g. Pero el dominio del cociente $\frac{f}{g}$, es la intersección de los dominios de f y g, excluyendo los valores para los que $g(x) = 0$.

1.5.2 Por Medio de Multiplicación por una Constante

Un caso especial de $f.g$ merece una mención especial.

Para cualquier número real c y cualquier función f, se define $c.f$ mediante:

$$\boxed{(c.f)(x) = c \cdot f(x)}$$

1.5.3 Por Medio de Composición de Funciones

Pueden componerse dos funciones al aplicar primero una función a un número y después la otra función al resultado.

Definición de Composición de Funciones:

Si f y g son funciones, **la composición de f con g es la función $f \circ g$ definida por**:

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$$

Donde el dominio $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g, tales que $g(x)$ este en el dominio de f.

En general la composición de funciones **no es conmutativa**.
En símbolos:
$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

Gráficamente la situación es:

$$x \xrightarrow{g} \boldsymbol{g(x)} \xrightarrow{f} \boldsymbol{f(g(x))}$$

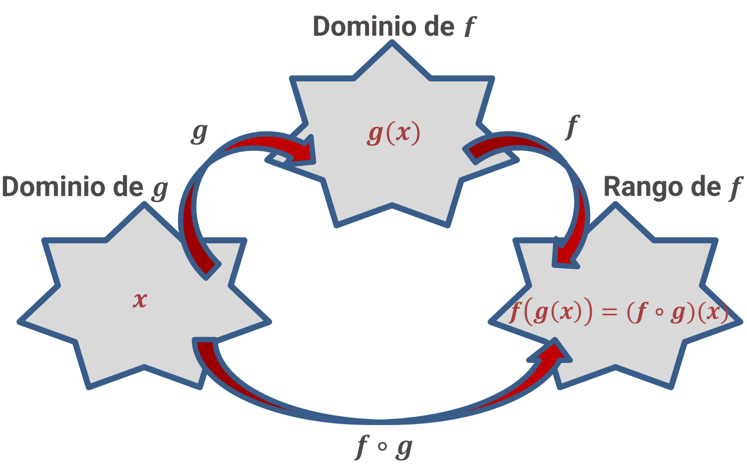


Fig. 19.: Composición de f con g.

Ejemplo, supone que $g(x) = 2x$, $f(x) = x^2$ y $x = 3$, si quisiéramos calcular $f(g(x))$:

$g(x) = 2x$ $f(x) = x^2$	$\Rightarrow \quad x = 3$	$g(3) = 2 \cdot 3 = 6$
g envía la entrada 3 a la salida 6	$3 \quad \xrightarrow{g}$	6
La salida 6 se convierte en la entrada para f	$\Rightarrow \quad 6$	$f(6) = 6^2 = 36$
De modo que f envía 6 al 36	$6 \quad \xrightarrow{f}$	36
$\boldsymbol{f(g(x)) = (2x)^2 = 2^2 . x^2 = 4x^2}$ $f(g(3)) = 4.3^2 = 4.9 = 36$		
Al aplicar primero g y después f, se envía 3 al 36:		
$3 \quad \xrightarrow{g} \quad 6 \quad \xrightarrow{f} \quad 36$		

1.5.4 Guía de Actividades Prácticas

ACTIVIDAD 6: El ingreso por la venta de un producto viene dado por la función $I(x) = 5x$ y el costo de dicho producto por la función $C(x) = 2x + 240$. Se te solicita que:

a) Combines la función ingreso y costo para crear la función beneficio.

b) Representes en un mismo sistema de ejes cartesianos las tres funciones.

c) Observes el gráfico obtenido y lo interpretes.

ACTIVIDAD 7: Escribe una función compuesta para representar el precio de góndola al consumidor final como una función del precio mayorista.

ACTIVIDAD 8: De acuerdo con los datos brindados por la catedra Producción de Cereales de la FAyV[6] de la UNRC[7], el rendimiento de la producción de maíz por hectárea, en función a la densidad de semillas en el Gran Río Cuarto es de:

Densidad de semillas (plantas/ha)	Rendimiento (kg/ha)
20000	8000
40000	10000
60000	10700
80000	9200
100000	8400

Cuando vamos al supermercado para hacer compras, tomamos un producto de la góndola y observamos su precio. ¿El valor coincide con el que el supermercadista lo adquirió al proveedor?

[6] Facultad de Agronomía y Veterinaria
[7] Universidad Nacional de Río Cuarto

Actualmente, el costo de la bolsa de 80.000 semillas de maíz es de $4.000 y el ingreso que se obtiene de la venta de maíz, descontado fletes y comisiones, es de $2,2 Kg. Con la información disponible, se te solicita que:

a) Representes los puntos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos.
b) Observes el grafico y respondas: ¿Qué sucede con el rendimiento por hectárea a medida que se siembran mayor cantidad de semillas por hectárea?
c) Calcules el costo de cada semilla.
d) Calcules y grafiques el ingreso que se obtiene por la venta de maíz.
e) Justifiques la siguiente afirmación: "**El ingreso obtenido en la producción de maíz es una función compuesta**".

1.6 Transformación de Funciones: Traslaciones y Reflexiones

A veces, al modificar una función mediante una manipulación algebraica, puede obtenerse la gráfica de la nueva función a partir de la gráfica de la función original. Algunas funciones y las gráficas a las que están asociadas aparecen con tanta frecuencia, que resulta útil memorizarlas.

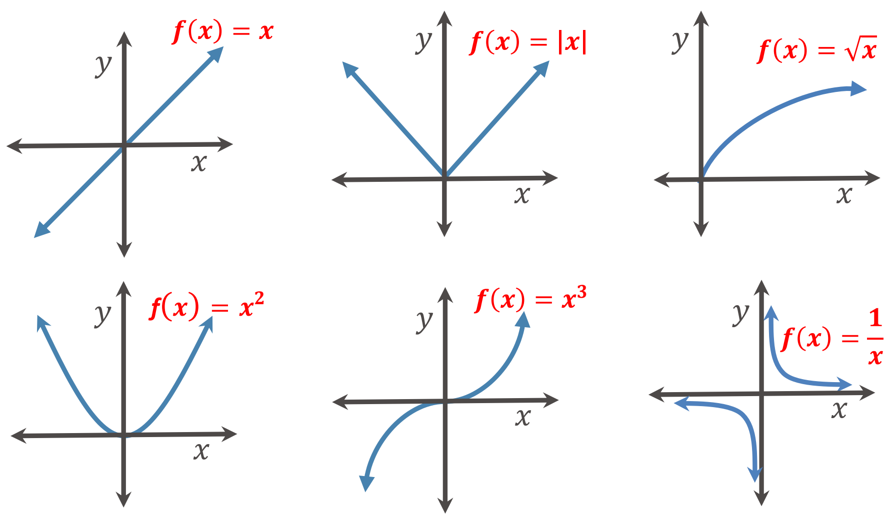
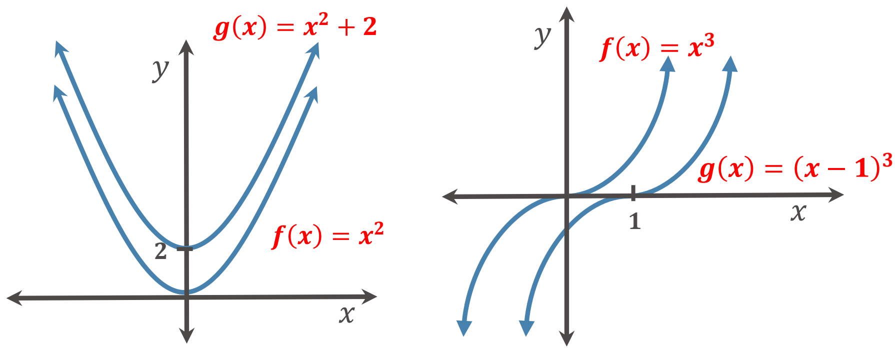


Fig. 20.: Funciones utilizadas con frecuencia

Observemos estos ejemplos donde las gráficas sufren diferentes transformaciones:



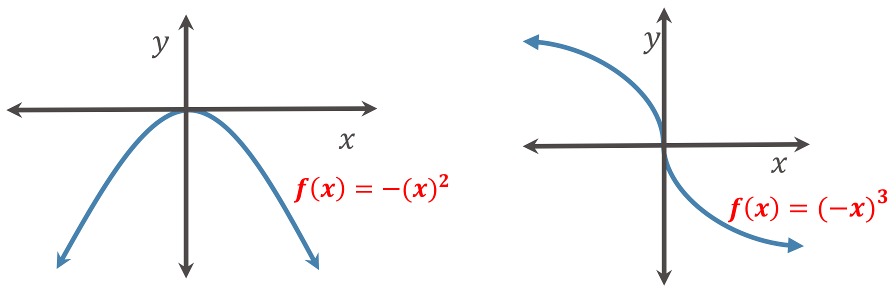
La gráfica de $f(x) = x^2 + 2$ es una **transformación** de la gráfica de $f(x) = x^2$

Traslación o desplazamiento vertical

La gráfica de $f(x) = (x-1)^3$ es una **transformación** de la gráfica de $f(x) = x^3$

Traslación o desplazamiento horizontal

Fig. 21.: Desplazamiento de funciones



La gráfica de $f(x) = -(x^2)$ es una **transformación** de la gráfica de $f(x) = x^2$

Reflexión con respecto al eje x

La gráfica de $f(x) = (-x)^3$ es una **transformación** de la gráfica de $f(x) = x^3$

Reflexión con respecto al eje y

Fig. 22.: Reflexión de funciones

La siguiente tabla presenta una lista de los tipos básicos de transformaciones.

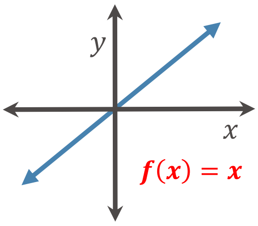
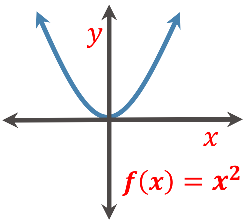
Transformaciones, $c > 0$

Ecuación	Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación.
$y = f(x) + c$	Desplaza c unidades hacia arriba.
$y = f(x) - c$	Desplaza c unidades hacia abajo.
$y = f(x - c)$	Desplaza c unidades hacia la derecha.
$y = f(x + c)$	Desplaza c unidades hacia la izquierda.
$y = -f(x)$	Refleja con respecto al eje x.
$y = f(-x)$	Refleja con respecto al eje y.

Tabla N° 6

1.6.1 Guía de Actividades Prácticas

<u>**ACTIVIDAD 9**</u>: A partir de las siguientes gráficas, se te solicita que transformes gráfica y algebraicamente las siguientes funciones. Puedes representar todas las transformaciones en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

	Expresión Analítica	Expresión Gráfica	Transformación de la función
$i)$	$f(x) = x$		**a)** Desplaza 3 unidades hacia arriba. **b)** Desplaza 2 unidades hacia la derecha. **c)** Refleja con respecto al eje y.
$ii)$	$f(x) = x^2$		**a)** Desplaza 2 unidades hacia abajo. **b)** Desplaza 3 unidades hacia la izquierda. **c)** Refleja con respecto al eje x.